Separoituva yhtälö

Koska differentiaaliyhtälö $y' = xy$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x,$$

se on separoituva, ja ratkaisu saadaan muodossa

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx + C.$$

Integroinnit antavat

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C,$$

jolloin

$$y = \pm e^C e^{x^2/2} = C_1 e^{x^2/2},$$

missä on merkitty $C_1 = \pm e^C$.

Tähän muotoon päästään suoraankin kirjoittamalla integroinnissa vakio muotoon $\ln|C|$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx + \ln|C|,\\
&\ln|y| = x^2/2 + \ln|C|,\\
&|y| = |C|e^{x^2/2},\\
&y = Ce^{x^2/2}.
\end{aligned}$$

Vakion kirjoittaminen tähän muotoon ei rajoita sen mahdollisia arvoja, sillä $\ln|C|$ saa kaikki positiiviset ja negatiivset arvot, kun $C \neq 0$.

Jos $C = 0$, saadaan yksittäisratkaisuksi $y(x) = 0$. Tämä on alkuperäisen yhtälön ratkaisu, mutta ei separoituun muotoon kirjoitetun yhtälön ratkaisu nimittäjän nollaksi tulemisen takia. Tämän johdosta arvo $C = 0$ on erikoistapaus ratkaisuprosessin kannalta.

Linkkejä

separoituva yhtälö

Simo K. Kivelä 26.04.2001