Sarjayritteen käyttö

Differentiaaliyhtälölle voidaan myös etsiä ratkaisua *sarjamuodossa*. Yritteeksi valitaan tällöin potenssisarja, jonka kehityskeskuksena on se piste x_0, jossa alkuehto annetaan. Yrite on tällöin muotoa

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

ja tavoitteena on määrittää kertoimet a_k siten, että differentiaaliyhtälö toteutuu.

Koska potenssisarja voidaan suppenemisalueessaan derivoida termeittäin, saadaan derivaattojen lausekkeiksi

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1},$$
$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}$$

jne. (Summausindeksin alarajaa voidaan vaihe vaiheelta nostaa, koska sarjan vakiotermin derivaatta on $= 0$.)

Funktion y ja sen derivaattojen sarjakehitelmät sijoitetaan differentiaaliyhtälöön ja vaaditaan, että se toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Differentiaaliyhtälön muodosta riippuu, miten helppoa tästä on edetä. Jotta sarjamuotoisen ratkaisun etsiminen ylipäätään olisi mielekästä, on yhtälössä esiinnyttävä vain muuttujan x ja funktion y tai sen derivaattojen polynomeja. Vaatimus yhtälön toteutumisesta tarkoittaa tällöin, että yhtälön eri puolilla esiintyvien muuttujan x samaeksponenttisten potenssien kertoimien pitää olla samat. Tämä johtaa kertoimia a_k koskevaan rekursiiviseen yhtälöryhmään, josta ainakin alkupään kertoimet voidaan ratkaista. Usein on myös mahdollista johtaa kertoimille rekursiokaava, jossa seuraava kerroin lausutaan edellisten avulla.

Tuloksena saadaan laskukaavat, joilla potenssisarjan kertoimia voidaan laskea mielivaltaisen pitkälle. Yleisen lausekkeen — kerroin a_k indeksin k funktiona — saaminen ei sen sijaan ole aina mahdollista.

Tarkempi kuvaus ratkaisumenetelmän soveltamisesta löytyy esimerkeistä.

Potenssisarjojen teorian mukaan sarja suppenee jollakin muotoa $]x_0 - R, x_0 + R[$ olevalla välillä. Välin keskipisteenä on siis sarjan kehityskeskus x_0. Välin päätepisteet voivat tilanteesta riippuen joko kuulua tai olla kuulumatta suppenemisalueeseen. Lukua R sanotaan sarjan *suppenemissäteeksi*.

Edellä kuvattu ratkaisumenettely ei sellaisenaan anna mitään tietoa saadun sarjan suppenemissäteestä, vaan se on tutkittava erikseen sarjateorian tarjoamilla keinoilla.

Linkkejä

sarjayrite ja rekursiokaavan johto, esimerkki
sarjaratkaisu symbolisella ohjelmalla / mma
sarjaratkaisu symbolisella ohjelmalla / mpl

Simo K. Kivelä 10.4.2001