Sarjayrite ja rekursiokaavan johto

Olkoon tarkasteltavana toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö $y'' + xy = 0$ (*Airyn yhtälö*, missä muuttujan x merkki on vaihdettu, ts. x-akselin suunta on käännetty).

Tämän sarjaratkaisu kehityskeskuksena origo saadaan yritteen

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

avulla. Sijoittaminen yhtälöön antaa

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0$$

eli

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + \cdots + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \cdots = 0.$$

Koska oikea puoli on $= 0$, tulee myös vasemmalla olla jokaisen x:n potenssin kertoimen $= 0$, mikä johtaa yhtälöryhmään

$$\begin{cases} 2a_2 = 0, \\ 6a_3 + a_0 = 0, \\ 12a_4 + a_1 = 0, \\ 20a_5 + a_2 = 0, \\ 30a_6 + a_3 = 0, \\ 42a_7 + a_4 = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisussa voidaan ilmeisesti a_0 ja a_1 valita vapaasti ja välttämättä on $a_2 = 0$. Kertoimesta a_3 alkaen kukin kerroin lasketaan aina kolmanneksi edellisen kertoimen avulla, ts. kertoimet a_5, a_8, a_{11} jne. ovat $= 0$, kertoimet a_3, a_6, a_9 jne. määräytyvät kertoimen a_0 avulla ja vastaavasti kerroin a_1 määrää kertoimet a_4, a_7, a_{10} jne.

Kuvatunkaltaiselle kertoimien rekursiiviselle laskemiselle voidaan myös johtaa yleinen kaava. Kun yhtälön

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0$$

edellisessä summassa indeksit numeroidaan uudelleen merkitsemällä $j = k - 2$ ja jälkimmäisessä summassa merkitsemällä $j = k + 1$, saadaan

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2}x^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1}x^j = 0$$

eli

$$2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty} [(j+2)(j+1)a_{j+2} + a_{j-1}]x^j = 0.$$

Koska kaikkien potenssien x^j kertoimien pitää olla $= 0$, on siis oltava

$$a_2 = 0, \qquad a_{j+2} = -\frac{a_{j-1}}{(j+2)(j+1)}, \; j = 1,2,3,\ldots.$$

Ratkaisuun jää kaksi määräämätöntä vakiota, a_0 ja a_1. Nämä ovat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa esiintyvät kaksi integroimisvakiota. Kun muut kertoimet rekursiota käyttäen lasketaan näiden avulla, saadaan

$$\begin{aligned} y = a_0 &\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \frac{x^9}{12960} + \frac{x^{12}}{1710720} - \frac{x^{15}}{359251200} + \frac{x^{18}}{109930867200} + \ldots\right) \\ + a_1 &\left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} - \frac{x^{10}}{45360} + \frac{x^{13}}{7076160} - \frac{x^{16}}{1698278400} + \frac{x^{19}}{580811212800} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Kyseessä on toisen kertaluvun lineaarisen ja homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu kahden perusratkaisun lineaariyhdistelynä, kuten teorian mukaan pitääkin.

Koska rekursiokaavan mukaan on

$$\left|\frac{a_{j+2}}{a_{j-1}}\right| = \frac{1}{(j+2)(j+1)}$$

ja tämän raja-arvo on $= 0$, kun $j \to \infty$, sarjaratkaisu suppenee kaikilla muuttujan x arvoilla potenssisarjojen teorian yleisten lauseiden mukaisesti. Tämä ei kuitenkaan merkitse, että sarjoja voitaisiin käyttää ratkaisufunktioiden numeeristen arvojen laskemiseen: argumentista x riippuen sarjojen suppeneminen saattaa olla hidasta ja laskenta erittäin altista pyöristysvirheille.

Linkkejä

sarjayritteen käyttö
homogeenisen lineaarisen yhtälön ratkaisujoukko
sarjaratkaisu symbolisella ohjelmalla / mma
sarjaratkaisu symbolisella ohjelmalla / mpl
Airyn differentiaaliyhtälö / mma
Airyn differentiaaliyhtälö / mpl
Airyn differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen / mma
Airyn differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen / mpl

Simo K. Kivelä 26.04.2001