

# Normaaliryhmä

Kertalukua  $n$  oleva differentiaaliyhtälö

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

voidaan kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi, ns. *normaaliryhmäksi*, jossa on  $n$  tuntematonta funktiota ja  $n$  yhtälöä. Etuna on, että tällöin kyseessä on ensimmäisen kertaluvun yhtälöt, mutta haittana, että näitä on useita.

Uusiksi tuntemattomiksi funktioiksi otetaan funktion  $y$  lisäksi sen derivaatat kertalukuun  $n - 1$  saakka:

$$y_0 = y, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots \quad y_{n-2} = y^{(n-2)}, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}.$$

Tällöin on

$$\begin{cases} y'_0 = y_1, \\ y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1}, \\ y'_{n-1} = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{cases}$$

missä viimeinen yhtälö on itse asiassa alkuperäinen differentiaaliyhtälö. Kyseessä on alkuperäistä differentiaaliyhtälöä vastaava normaaliryhmä.

Saatu normaaliryhmä voidaan kirjoittaa tiiviimpään vektorimuotoon kokoamalla tuntemattomat funktiot  $n$ -komponenttiseksi vektoriksi  $Y$  ja määrittelemällä funktio  $F$ , jonka arvot ovat  $n$ -komponenttisia vektoreita:

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Normaaliryhmä voidaan tällöin kirjoittaa lyhyesti vektorimuotoon

$$Y' = F(x, Y),$$

missä derivaatta  $Y'$  lasketaan komponenteittain. Ryhmä on tällöin muodoltaan samanlainen kuin tavallinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Erona on, että funktio  $F$  onkin vektoriarvoinen ja tuntematon funktio  $Y$  on myös vektori.

Vektorimuodon käyttökelpoisuus perustuu siihen, että monet ensimmäisen kertaluvun yhtälöä koskevat algoritmit voidaan yleistää korkeampia kertalukuja koskeviksi, kun niitä sovelletaan vektorimuotoon.

## Linkkejä

[normaaliryhmän muodostaminen, esimerkki](#)  
[ratkaisun olemassaolo](#)

faasitaso  
faasiavaruus  
numeerisen ratkaisemisen periaate  
laskuvarjohyppy / mma  
planeetan liike Auringon ympäri / mma  
laskuvarjohyppy / mpl  
planeetan liike Auringon ympäri / mpl

*Simo K. Kivelä* 27.03.2001