Sijoitusten tekeminen

Differentiaaliyhtälön yksinkertaistamiseksi voidaan siirtyä sopivasti valittuun uuteen tuntemattomaan funktioon. Toisena mahdollisuutena on vaihtaa riippumatonta muuttujaa. Kummassakin tapauksessa joudutaan yhtälössä esiintyvät derivaatat muuntamaan yhdistetyn funktion derivointisäännön, ns. ketjusäännön avulla.

1) Otettaessa käyttöön uusi tuntematon funktio $u(x)$ on luonnollisinta lausua vanha tuntematon funktio tämän avulla: $y(x) = g(x, u(x))$, missä funktio g kuvaa kyseessä olevaa riippuvuutta.

Kun tämä yhtälö derivoidaan muuttujan x suhteen, saadaan $y'(x)$ lausuttuna funktion u ja sen derivaatan u' avulla. Derivoitaessa saatua yhtälöä toistamiseen saadaan $y''(x)$ lausuttuna funktion u ja sen derivaattojen u' ja u'' avulla jne. Kun nämä lausekkeet sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön funktion y ja sen derivaattojen sijaan, saadaan funktiota u koskeva differentiaaliyhtälö.

2) Otettaessa käyttöön uusi muuttuja t alkuperäisen muuttujan x sijaan on lähtökohtana näiden välinen riippuvuus: $x = g(t)$. Tuntematonta funktiota y tulee tällöin vastaamaan uusi tuntematon funktio u siten, että $u(t) = y(x) = y(g(t))$, ts. u on funktioista g ja y yhdistetty funktio.

Derivoimalla ketjusäännön mukaisesti saadaan $u'(t) = y'(x)g'(t)$, josta voidaan ratkaista $y'(x)$. Derivoimalla saatua yhtälöä edelleen voidaan vastaavalla tavalla ratkaista $y''(x)$ jne. Sijoittamalla nämä ja yhteys $x = g(t)$ alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön se saadaan muunnetuksi funktiota $u(t)$ koskevaksi.

Kun muunnettu yhtälö — toivottavasti — on saatu ratkaistuksi, on kummassakin tapauksessa lopuksi palattava alkuperäiseen muuttujaan ja alkuperäiseen tuntemattomaan funktioon.

Linkkejä

yhtälön muuntaminen sijoituksella $u = y/x$, esimerkki
yhtälön muuntaminen sijoittamalla sopiva funktio, esimerkki
Eulerin yhtälön muuntaminen

Simo K. Kivelä 27.03.2001