

# Käyräparven differentiaaliyhtälön etsiminen

Olkoon annettuna käyräparvi

$$\text{kayraparvi} = (x + C[1])^2 + (y + C[2])^2 == C[3]^2$$

$$(x + C[1])^2 + (y + C[2])^2 == C[3]^2$$

missä  $C[1]$ ,  $C[2]$  ja  $C[3]$  ovat parven parametrit. Jokaisella (ainakin lähes) näiden arvokombinaatiolla parvesta saatava yhtälö esittää tason ympyrää. Toisaalta tason jokaisen ympyrän yhtälö on tätä muotoa.

Tulkitaan  $y$  funktioksi muuttujasta  $x$  tavoitteena löytää differentiaaliyhtälö tälle funktiolle:

$$\text{parvi} = \text{kayraparvi} /. y \rightarrow y[x]$$

$$(x + C[1])^2 + (C[2] + y[x])^2 == C[3]^2$$

Derivoidaan tämä yhtälö kolmesti, minkä jälkeen saaduista neljästä yhtälöstä eliminoidaan parametrit  $C[1]$ ,  $C[2]$  ja  $C[3]$ :

$$\text{parvi1} = D[\text{parvi}, x]$$

$$2(x + C[1]) + 2(C[2] + y[x]) y'[x] == 0$$

$$\text{parvi2} = D[\text{parvi}, \{x, 2\}]$$

$$2 + 2y'[x]^2 + 2(C[2] + y[x]) y''[x] == 0$$

$$\text{parvi3} = D[\text{parvi}, \{x, 3\}]$$

$$6y'[x] y''[x] + 2(C[2] + y[x]) y^{(3)}[x] == 0$$

$$\text{diffyht} = \text{Eliminate}[\{\text{parvi}, \text{parvi1}, \text{parvi2}, \text{parvi3}\}, \{C[1], C[2], C[3]\}]$$

$$(1 + y'[x]^2) y^{(3)}[x] == 3y'[x] y''[x]^2$$

Tuloksena on kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka yleisenä ratkaisuna on alkuperäinen käyräparvi. Kyseessä on siten kaikkien tason ympyröiden differentiaaliyhtälö.

Saadulla differentiaaliyhtälöllä on kuitenkin muitakin ratkaisuja:

$$\text{diffyht} /. y \rightarrow \text{Function}[x, D[1] x + D[2]]$$

True

---

## Linkit

käyräparvi ja differentiaaliyhtälö  
edellä saadun differentiaaliyhtälön ratkaiseminen separoimalla

*SKK 27.04.2001*