Differentiaaliyhtälön ratkaisun sijoittaminen yhtälöön

Lausekemuotoisen ratkaisun sijoittaminen

Olkoon tarkastelun kohteena differentiaaliyhtälö

```
diffyht = y''[x] - 4 y'[x] + 13 y[x] == 0
```

```
13 y[x] - 4 y′[x] + y″[x] == 0
```

jonka lausekemuotoinen ratkaisu on

```
y0 = DSolve[diffyht, y[x], x]
```

$\{\{y[x] \to e^{2x} C[2] \operatorname{Cos}[3x] + e^{2x} C[1] \operatorname{Sin}[3x]\}\}$

Kyseessä on ratkaisufunktiota $y(x)$ koskeva sijoitussääntö. Vastaavat sijoitussäännöt derivaatoille saadaan tätä derivoimalla:

```
y1 = D[y0, x]
```

$\{\{y'[x] \to 3 e^{2x} C[1] \operatorname{Cos}[3x] + 2 e^{2x} C[2] \operatorname{Cos}[3x] + 2 e^{2x} C[1] \operatorname{Sin}[3x] - 3 e^{2x} C[2] \operatorname{Sin}[3x]\}\}$

```
y2 = D[y0, {x, 2}]
```

$\{\{y''[x] \to 12 e^{2x} C[1] \operatorname{Cos}[3x] - 5 e^{2x} C[2] \operatorname{Cos}[3x] - 5 e^{2x} C[1] \operatorname{Sin}[3x] - 12 e^{2x} C[2] \operatorname{Sin}[3x]\}\}$

Sijoitussäännöt voidaan yhdistää yhdeksi sijoituslistaksi `Flatten`-komennolla ja sijoittaa yhtälöön:

```
sijoitus1 = diffyht /. Flatten[{y0, y1, y2}]
```

$$12 e^{2x} C[1] \operatorname{Cos}[3x] - 5 e^{2x} C[2] \operatorname{Cos}[3x] - 5 e^{2x} C[1] \operatorname{Sin}[3x] - 12 e^{2x} C[2] \operatorname{Sin}[3x] + 13 (e^{2x} C[2] \operatorname{Cos}[3x] + e^{2x} C[1] \operatorname{Sin}[3x]) - 4 (3 e^{2x} C[1] \operatorname{Cos}[3x] + 2 e^{2x} C[2] \operatorname{Cos}[3x] + 2 e^{2x} C[1] \operatorname{Sin}[3x] - 3 e^{2x} C[2] \operatorname{Sin}[3x]) == 0$$

Tämän sieventäminen osoittaa, että yhtälö toteutuu:

```
Simplify[sijoitus1]
```

```
True
```

Funktiomuotoisen ratkaisun sijoittaminen

Hieman vähemmällä päästään, jos differentiaaliyhtälön ratkaisu halutaan funktion eikä lausekkeen muodossa:

```
y0 = DSolve[diffyht, y, x]
```

```
{{y → Function[{x}, ⅇ^(2 x) C[2] Cos[3 x] + ⅇ^(2 x) C[1] Sin[3 x]]}}
```

Sijoittamalla differentiaaliyhtälöön saadaan

```
sijoitus2 = diffyht /. First[y0]
```

```
12 ⅇ^(2 x) C[1] Cos[3 x] - 5 ⅇ^(2 x) C[2] Cos[3 x] - 5 ⅇ^(2 x) C[1] Sin[3 x] -
  12 ⅇ^(2 x) C[2] Sin[3 x] + 13 (ⅇ^(2 x) C[2] Cos[3 x] + ⅇ^(2 x) C[1] Sin[3 x]) -
  4 (3 ⅇ^(2 x) C[1] Cos[3 x] + 2 ⅇ^(2 x) C[2] Cos[3 x] + 2 ⅇ^(2 x) C[1] Sin[3 x] - 3 ⅇ^(2 x) C[2] Sin[3 x]) == 0
```

minkä jälkeen sieventäminen osoittaa, että yhtälö toteutuu:

```
Simplify[sijoitus2]
```

```
True
```

Derivaattoja koskevia sijoitussääntöjä ei siis tarvitse erikseen muodostaa.

Linkit

ratkaiseminen algebrallisesti Mathematicalla (symalg.nb)

SKK 27.04.2001