Käyräparven differentiaaliyhtälön etsiminen

Olkoon annettuna käyräparvi

```
> kayraparvi:= (x+_C1)^2+(y+_C2)^2=_C3^2;
```

$$kayraparvi := (x + \_C1)^2 + (y + \_C2)^2 = \_C3^2$$

missä $\_C1$, $\_C2$ ja $\_C3$ ovat parven parametrit. Jokaisella (ainakin lähes) näiden arvokombinaatiolla parvesta saatava yhtälö esittää tason ympyrää. Toisaalta tason jokaisen ympyrän yhtälö on tätä muotoa.

Tulkitaan y funktioksi muuttujasta x tavoitteena löytää differentiaaliyhtälö tälle funktiolle:

```
> parvi:= subs(y=y(x), kayraparvi);
```

$$parvi := (x + \_C1)^2 + (\mathrm{y}(x) + \_C2)^2 = \_C3^2$$

Derivoidaan tämä yhtälö kolmesti, minkä jälkeen saaduista neljästä yhtälöstä eliminoidaan parametrit $\_C1$, $\_C2$ ja $\_C3$:

```
> parvi1:=diff(parvi, x);
```

$$parvi1 := 2\,x + 2\,\_C1 + 2\,(\mathrm{y}(x) + \_C2)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> parvi2:=diff(parvi, x$2);
```

$$parvi2 := 2 + 2\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 + 2\,(\mathrm{y}(x) + \_C2)\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> parvi3:=diff(parvi, x$3);
```

$$parvi3 := 6\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + 2\,(\mathrm{y}(x) + \_C2)\left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> ratk:= eliminate({parvi, parvi1, parvi2, parvi3}, {_C1, _C2,
  _C3});
```

$$ratk := \left[\left\{\_C2 = -\frac{1 + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right)\mathrm{y}(x)}{\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)},\right.\right.$$

$$\_C1 = \frac{-x\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^3}{\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)},$$

$$\_C3 = \frac{\mathrm{RootOf}\left(\_Z^2 - \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 - 1,\ label = \_L2\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 + 1\right)}{\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)}\Bigg\}, $$

$$\{3\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right)^2 - \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2\}$$

`Eliminate`-komento antaa listan, jonka viimeisenä alkiona on eliminoinnin tulos polynomin muodossa. Ratkaisu muunnetaan yhtälömuotoon merkitsemällä polynomi nollaksi.

```
> diffyht:= op(ratk[-1])=0;
```

$$diffyht := 3\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right)^2 - \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 = 0$$

Tuloksena on kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka yleisenä ratkaisuna on alkuperäinen käyräparvi. Kyseessä on siten kaikkien tason ympyröiden differentiaaliyhtälö.

Saadulla differentiaaliyhtälöllä on kuitenkin muitakin ratkaisuja:

```
> simplify(subs(y(x)=_D1*x+_D2, diffyht));
```

$$3\left(\frac{\partial}{\partial x}(\_D1\,x + \_D2)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\_D1\,x + \_D2)\right)^2 - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\_D1\,x + \_D2)\right)$$
$$- \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\_D1\,x + \_D2)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}(\_D1\,x + \_D2)\right)^2 = 0$$

```
>
```

Linkit

käyräparvi ja differentiaaliyhtälö
edellä saadun differentiaaliyhtälön ratkaiseminen separoimalla

SKK & MS 31.05.2001