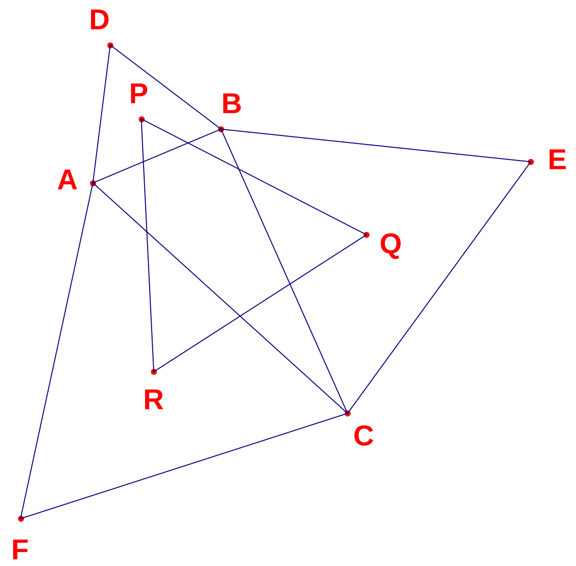
Napoleonin lause todistuksineen

Napoleonin lause on seuraava:

Mielivaltaisen kolmion ABC sivuille (kolmion ABC ulkopuolelle) asetetaan tasasivuiset kolmiot ABD, BCE ja CAF; näiden keskipisteet olkoot P, Q ja R. Tällöin kolmio PQR on tasasivuinen ja sen keskipiste yhtyy alkuperäisen kolmion keskipisteeseen (so. keskijanojen leikkauspisteeseen).



Geometrisia lauseita todistetaan usein piirtämällä sopivia apupiirroksia ja päättelemällä kuvion pisteistä, suorista, janoista, ympyröistä jne. erilaisia asioita. Ajatustapa on peräisin antiikin kreikkalaisilta ja elänyt ns. euklidisen geometrian opetuksessa vuosisatoja ellei -tuhansia.

Paljon myöhemmin syntynyttä algebraa voidaan kuitenkin myös käyttää. Tämä voi tapahtua *analyyttisen geometrian* (koordinaattigeometrian) muodossa tarkastelemalla pisteitä koordinaattien avulla sekä suoria ja ympyröitä niiden yhtälöiden avulla. Analyyttisen geometrian loi ranskalainen filosofi ja matemaatikko René Descartes 1600-luvulla. (Descartes kuoli vuonna 1650 Tukholmassa, jonne Ruotsin kuningatar Kristiina oli kutsunut hänet filosofian opettajakseen. Kylmä talvi, koleat huoneet, aamulla kello viisi alkaneet oppitunnit kuningattarelle mursivat hänen terveytensä.)

Toinen vaihtoehto on *vektorialgebran* käyttö. Tämä on viime 1800-luvulla syntynyttä, luojina lähinnä irlantilainen William Rowan Hamilton ja saksalainen Hermann Grassmann.

Kolmas mahdollisuus on *kompleksilukualgebra*, jonka esitti johdonmukaisessa muodossa erittäin monipuolinen saksalainen matemaatikko Carl Friedrich Gauss 1800-luvun alussa. (Tosin norjalainen Caspar Wessel oli esittänyt kompleksitason käsitteen jo ennen Gaussia, mutta hänen tanskankielistä työtään ei tunnettu.)

Kompleksilukualgebra antaa ehkä vahvimman työkalun Napoleonin lauseen todistamiseen. Syynä on ennen muuta se, että tarvittavat 60 asteen kierrot on helposti hallitavissa kompleksilukujen avulla.

Kiertotekijä. Muotoa $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$ olevaa kompleksilukua voidaan kutsua *kiertotekijäksi*, koska sillä kertominen kiertää kompleksilukua kulman α verran origon ympäri. Tämän voi tarkistaa tämän kirjoittamalla mielivaltaisen kompleksiluvun $z = x + iy$ napakoordinaattimuotoon $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ja laskemalla tulon uz. Tulos saadaan käyttämällä sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja.

Tarkoittakoon u seuraavassa 60 asteen suuruista kiertoa: $u = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Koska kolme 60 asteen kiertoa merkitsee yhteensä 180 asteen kiertoa, on $u^3 = -1$ eli $u^3 + 1 = 0$. Tämä voidaan jakaa tekijöihin: $u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1) = 0$. Koska $u + 1 \neq 0$, on kyseisellä kiertotekijällä ilmeisestikin ominaisuus $u^2 + 1 = u$.

Tämän yhtälön voi luonnollisestikin tarkistaa myös sijoittamalla siihen $u = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Se voidaan lisäksi tulkita vektoreiden yhteenlaskuksi: jos piirretään origosta alkavat pisteisiin u^2 ja 1 päättyvät vektorit ja lasketaan ne yhteen, saadaan u. Kompleksilukujen yhteenlaskuhan on vektoriyhteenlaskua.

Lauseen todistus. Kolmion kärkipisteitä esittävät kompleksiluvut olkoot a, b ja c. Siis $a = a_1 + ia_2$, kun pisteen A koordinaatit ovat $(a_, a_2)$, jne. Esitystä reaali- ja imaginaariosan avulla ei seuraavassa kuitenkaan tarvita.

Tasasivuisen kolmion ABD kärki D kompleksilukuna on $d = a + u(b - a)$. Kyseessä on vektorisumma: origosta pisteeseen A osoittava vektori lisättynä 60 astetta kierretyllä vektorilla $\overline{AB}$. Vastaavasti $e = b + u(c - b)$ ja $f = c + u(a - c)$.

Koska kolmion keskijanojen leikkauspiste saadaan kärkipisteiden keskiarvona, on $p = \frac{1}{3}(a + b + d) = \frac{1}{3}[2a + b + u(b - a)]$ ja samoin $q = \frac{1}{3}[2b + c + u(c - b)]$, $r = \frac{1}{3}[2c + a + u(a - c)]$.

Kolmion PQR keskipiste on tällöin

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{3}(p + q + r) &= \tfrac{1}{9}[2a + b + u(b - a) + 2b + c + u(c - b) + 2c + a + u(a - c)] \\ &= \tfrac{1}{3}(a + b + c),\end{aligned}$$

ts. sama kuin alkuperäisen kolmion keskijanojen leikkauspiste.

Kiertämällä vektoria $\overline{PR}$, ts. kertomalla erotuskompleksiluku $r - p$ kiertotekijällä saadaan seuraavaa:

$$\begin{aligned}u(r - p) &= \tfrac{1}{3}u[2c - a - b + u(2a - b - c)] \\ &= \tfrac{1}{3}[u(2c - a - b) + u^2(2a - b - c)] \\ &= \tfrac{1}{3}[u(2c - a - b) + (u - 1)(2a - b - c)] \\ &= \tfrac{1}{3}[b + c - 2a + u(a + c - 2b)] \\ &= q - p.\end{aligned}$$

Tuloksena on siis vektori $\overline{PQ}$. Tällöin kulman RPQ suuruus on 60 astetta ja sivut PR ja PQ ovat yhtä pitkiä. Tämä riittääkin tekemään kolmion PQR tasasivuiseksi.

Todistus on valmis!

Simo K. Kivelä 03.01.2005