Riemannin pintojen visualisoinnista

eli

Funktioiden $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaajat

Simo K. Kivelä

17.7.2006

Tarkastelun kohteena olkoon kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = w \quad \text{eli} \quad f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Tätä voidaan ajatella myös funktiona $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

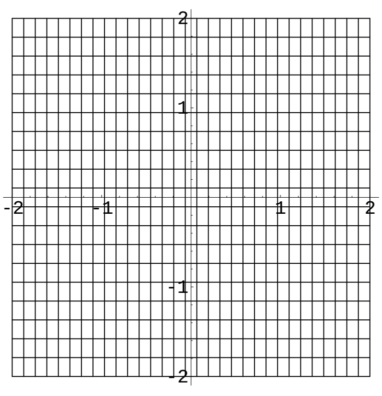
$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Ruudukko lähtö- maaliavaruudessa

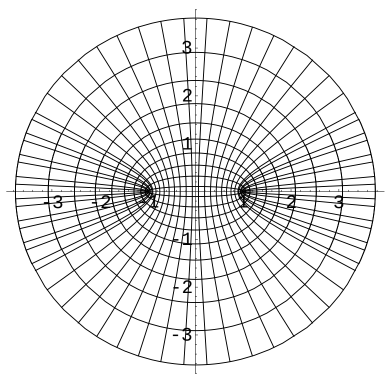
Funktiota $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ voidaan havainnollistaa asettamalla lähtötasoon $\mathbb{R}^2$ esimerkiksi suorakulmainen tai napakoordinaattien mukainen ruudukko ja piirtämällä tämän kuva maalitasossa $\mathbb{R}^2$. Esimerkiksi sinifunktion

$$\sin(x + \mathrm{i}y) = \cosh(y)\sin(x) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y)$$

tapauksessa saadaan tällöin seuraava kuvio (joka on laadittu Mathematican `Graphics‘ComplexMap‘`-paketilla):



$\longrightarrow$



Funktion kuvaajan projisiointi

Toinen vaihtoehto havainnollistamiseen on funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *kuvaajan* muodostaminen. Tämä on neliulotteisen uvxy-avaruuden kaksiulotteinen monisto (pinta), johon kuuluvat pisteet

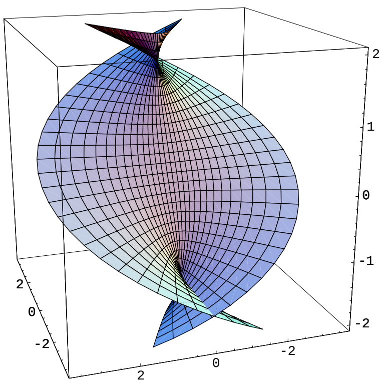
$$(u(x, y), v(x, y), x, y).$$

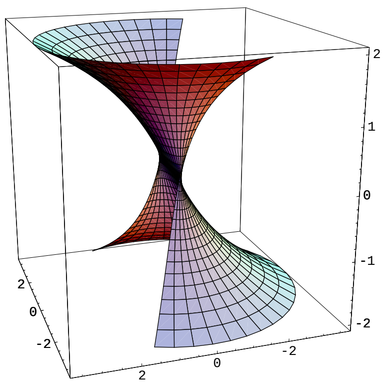
Tässä x ja y ovat pintaparametrit ja ne saavat sellaiset arvot, että piste (x, y) on funktion määrittelyjoukossa. Koordinaatit u, v, x ja y voisivat olla muussakin järjestyksessä, mutta seuraavan esityksen kannalta ylläoleva on luontevin.

Neliulotteisen avaruuden pinnasta ei suoranaisesti voida piirtää kuvaa, mutta pudottamalla joko x- tai y-koordinaatti pois saadaan kolmiulotteisen avaruuden pinta parametrimuodossa:

$$(u(x, y), v(x, y), x) \quad \text{tai} \quad (u(x, y), v(x, y), y).$$

Tämän kuva voidaan piirtää tavalliseen tapaan (esimerkiksi Mathematican `ParametricPlot3D`-komennolla). Sinifunktion tapauksessa kuvat näyttävät seuraavilta:



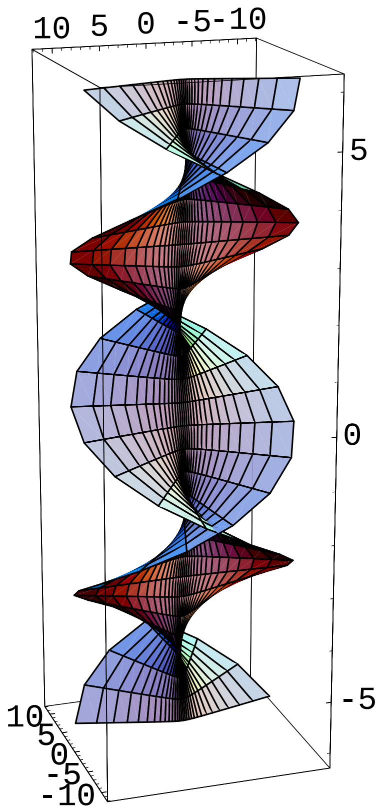


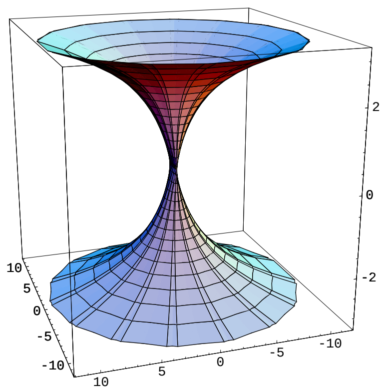
Kuvat voidaan ymmärtää kahdella tavalla:

Kyseessä on edellisessä havainnollistuksessa muodostettu uv-tason verkko nostettuna ylös uv-tasosta. Ylösnoston määrä kussakin pisteessä riippuu pisteeseen liittyvästä x-, vastaavasti y-arvosta.

Toinen tulkinta perustuu neliulotteisessa avaruudessa olevan kuvaajan projisiointiin yhdensuuntaisprojektiolla. Projektiosäde on tällöin y-, vastaavasti x-akselin suuntainen, ja kuva syntyy kolmiulotteiseen uvx- tai uvy-avaruuteen. Tilanne on analoginen kolmiulotteisessa xyz-avaruudessa olevan kohteen projisioinnille zx- tai zy-kordinaattitasoon.

Laajentamalla parametrien vaihtelualuetta saadaan myös laajemmat kuvaajat:





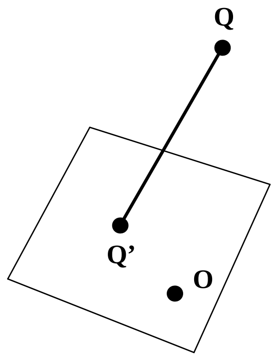
Kumpikin on siis saman neliulotteisen moniston projektiokuva. Edellisessä pinnan osat eivät osu päällekkäin, jälkimäisessä pinta peittää itseään moneen kertaan.

Edellistä kuvaa kutsutaan usein sinifunktion *Riemannin pinnaksi* ja sitä käytetään kompleksisen sinifunktion havainnollistamiseen. Pinnan päällekkäiset osat ovat Riemannin pinnan *lehtiä*. Jälkimmäinen kuva ei havainnollistamiseen kelpaa, koska eri lehdet osuvat päällekkäin.

Kuvaajaa kiertämässä neliulotteisessa avaruudessa

Kolmiulotteisen avaruuden yhdensuuntaisprojektion määrittää kiinteä taso, *kuvataso*, ja kiinteä suunta, *projektiosäteen* suunta. Kuvatason voidaan rajoituksetta olettaa kulkevan origon kautta. Annetun pisteen Q kuvapiste Q' löydetään asettamalla projektiosäde pisteen kautta ja määrittämällä tämän leikkauspiste kuvatason kanssa. Projektiosäde ei luonnollisestikaan saa olla kuvatason suuntainen, mutta muutoin sen suunta voi olla mikä tahansa. Tärkeä erikoistapaus on kuitenkin *ortogonaaliprojektio*, jossa projektiosäde on kohtisuorassa kuvatasoa vastaan.

Laajempi kohde projisioidaan etsimällä periaatteessa jokaiselle sen pisteelle kuvapiste.



Ortogonaalisella yhdensuuntaisprojektiolla muodostettu kuva vastaa näkymää, jonka projektiosäteen suunnassa oleva katsoja kohteesta näkee.

Ajatus voidaan yleistää neliulotteiseen avaruuteen. Tällöin ortogonaalisella yhdensuuntaisprojektiolla muodostetaan kohteesta kuva kolmiulotteiseen aliavaruuteen, joka vastaa tavallisen yhdensuuntaisprojektion kuvatasoa. Kuva on kolmiulotteinen ja se voidaan ajatella neliulotteisen avaruuden asukkaan näkymäksi kohteeseen. (Kolmiulotteista kuvaa katsotaan kaksiulotteisella tietokoneen ruudulla tai paperilla, jolloin on tarvittu vielä toinen projektiokuvaus.)

Edellä esitetyt kaksi projektiota sinifunktion kuvaajasta ovat siten kaksi neliulotteisen avaruuden näkymää kuvaajaan. Yhdensuuntaisprojektiot voivat kuitenkin olla muunkinlaisia. Muuttamalla projektiosäteen suuntaa voidaan muodostaa animaatioita, joissa kohdetta katsellaan eri suunnista neliulotteisessa avaruudessa.

Seuraavat esimerkit ovat tällaisia animaatioita. Projektiosäteen suunta on määritetty neliulotteisen avaruuden pallokoordinaattien avulla:

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2)\cos(\varphi) \\ x_2 = r\sin(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2)\sin(\varphi) \\ x_3 = r\sin(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2) \\ x_4 = r\cos(\vartheta_1) \end{cases},$$

missä $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$, $0 \leq \vartheta_2 \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Esimerkeissä olevat janat ovat säätimiä, joissa olevaa punaista pistettä siirtämällä voidaan muuttaa projektiosäteen suuntakulmien ϑ_1, ϑ_2 ja φ arvoja. Tällöin kohteen kuva muuntuu neliulotteisen avaruuden katselusuuntaa vastaavasti. Tarttumalla hiirellä projektiokuvaan (joka siis on kolmiulotteisen avaruuden olio) voidaan lisäksi kiertää kuvaa kolmiulotteisessa avaruudessa.

Esimerkit

- funktio z^2
- funktio z^3
- funktio $1/z$

- eksponenttifunktio
- sinifunktio
- tangenttifunktio
- logaritmifunktio
- funktio $\sqrt{1-z^2}$
- funktio $f(x,y) = (\frac{1}{3}x^3 + xy, x + y)$

Esimerkeissä on näkyvissä myös neliulotteisen avaruuden koordinaattiakseliston kuva. Tämäkin nähdään eri suunnista, kun katselusuuntaa vaihdetaan. Värien merkitys on seuraava: u-akseli — punainen, v-akseli — vihreä, x-akseli — sininen, y-akseli — keltainen.

Esimerkit on laadittu Mathematicaa käyttäen. Apuna on ollut itse tehty lisäpaketti R2R2tools.m, jota käyttäen projisionti on laskettu; esimerkkinä sinifunktion laskemisessa käytetty Mathematican muistikirja. Animaatiot on tehty Martin Krausin LiveGraphics3D -pakettia käyttäen.

Laajennuksia

Kolmiulotteisia projektiokuvia voidaan muodostaa muistakin neliulotteisen avaruuden kaksiulotteisista monistoista kuin funktioiden $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tai $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaajista.

Kleinin pullo voidaan upottaa neliulotteiseen avaruuteen, ilman että se leikkaa itseään. Parametriesitykseksi voidaan tällöin valita esimerkiksi

$$\begin{aligned}
&(\cos(u)(\cos(\frac{u}{2})\sin(v) - \sin(\frac{u}{2})\sin(2v) + 3),\\
&\ \sin(u)(\cos(\frac{u}{2})\sin(v) - \sin(\frac{u}{2})\sin(2v) + 3),\\
&\ \sin(\frac{u}{2})\sin(v) + \cos(\frac{u}{2})\sin(2v),\\
&\ 5\cos(v)),
\end{aligned}$$

missä $-\pi < u \leq \pi$ ja $-\pi < v \leq \pi$. Muunneltavia yhdensuuntaisprojektiokuvia voidaan tällöin muodostaa täsmälleen samoin kuin edellä. Näihin voidaan lisätä vielä neljäskin säätö: antamalla parametrile v arvot väliltä $[-a, a]$, missä $0 \leq a \leq \pi$, saadaan Kleinin pullo avatuksi yhtä meridiaanikäyrää pitkin. Tällöin animaatio näyttää, että Möbiuksen nauha muuttuu Kleinin pulloksi, kun nauhan vastakkaisilla puolilla olevat pisteet liitetään yhteen.

Toisena esimerkkinä on ns. **'Flat torus'**, monisto

$$(\sin(u), \cos(u), \sin(v), \cos(v)), \quad -\pi < u \leq \pi, \quad -\pi < v \leq \pi.$$

Myös tässä voidaan pinta avata neljännellä säädöllä: $v \in [-a, a]$, $0 \leq a \leq \pi$.

Harjoitustehtäviä

1. Funktion z^2 Riemannin pinnalla sijaitsee jossakin kohdassa reaalisen funktion kuvaaja, ts. paraabeli $y = x^2$. Missä kohdassa?

2. Sinifunktion Riemannin pinnalla sijaitsee jossakin kohdassa reaalisen funktion kuvaaja, ts. sinikäyrä $y = \sin x$. Missä kohdassa?

3. Millainen on eksponenttifunktion kuvaajassa esiintyvä kärki?

4. Mistä neliulotteisen avaruuden suunnasta eksponenttifunktion kuvaajaa on katsottava, jotta sen ääriviivana olisi sinikäyrä?

5. Minkä funktion kuvaaja tässä on kyseessä?