Simo K. Kivelä, 13.8.2009

Algebran peruslause

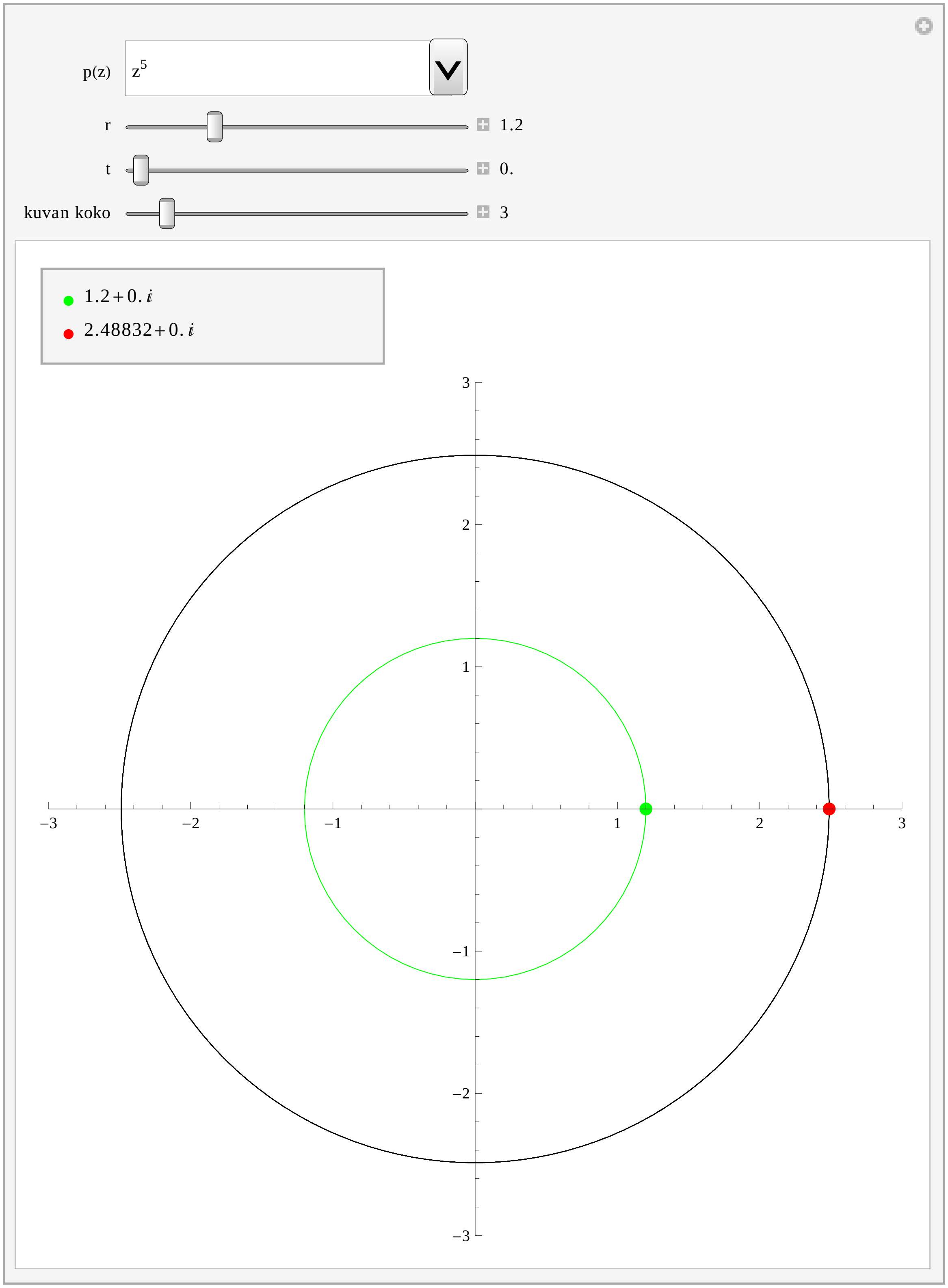
Algebran peruslauseen mukaan jokaisella vähintään ensimmäistä astetta olevalla polynomilla

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$$

on ainakin yksi nollakohta kompleksitasossa. Kertoimet a_k ovat reaali- tai kompleksilukuja. Lauseen todisti Carl Friedrich Gauss väitöskirjassaan vuonna 1799. Sittemmin sille on esitetty monia erilaisia todistuksia. Alla oleva muunneltava demonstraatio esittää erään todistuksen idean ja on melko helposti täydennettävissä varsinaiseksi todistukseksi.

Demonstraation taso on kompleksitaso. Vihreä ympyrä on origokeskinen r-säteinen ympyrä, jonka sädettä voidaan säätää liukusäätimellä. Tarkastelun kohteeksi valitaan valikosta jokin polynomi; tämä on funktio kompleksitasosta kompleksitasoon. Musta käyrä on tämän funktion vihreästä ympyrästä antama kuva. Vihreän pisteen kuva puolestaan on punainen piste. Vihreän pisteen napakulma välillä $[0, 2\pi[$ on parametri t, jota voidaan muuttaa liukusäätimellä. Tällöin vihreä piste kulkee pitkin vihreää ympyrää ja sen kuva punainen piste pitkin kuvakäyrää. Vasemman yläkulman panelissa on ilmoitettu pisteiden koordinaatit kompleksilukuina.

Koska vihreän ympyrän kuvakäyrä voi olla polynomista ja säteestä r riippuen olla aika laajakin, on käytettävissä kolmas liukusäädin, jolla voidaan muuttaa kuva-alueen kokoa.



Algebran peruslauseen todistus voidaan esittää vaiheittain seuraavasti:

1) Voidaan olettaa, että $a_0 \neq 0$. Jos nimittäin on $a_0 = 0$, niin yhtälöllä on nollakohta $z = 0$. Voidaan myös olettaa, että $a_n = 1$, sillä polynomin nollakohdat eivät muutu, jos polynomi kerrotaan vakiolla.

2) Valitse tarkasteltavaksi polynomi $p(z) = z^5$. Tällöin vihreän ympyrän kuva on ympyrä säteestä r riippumatta ja vihreän pisteen kiertäessä vihreän ympyrän kerran, punainen piste tekee viisi kierrosta. Kokeile! **Osoita analyyttisesti**: Jos polynomi on z^n, punainen piste tekee n kierrosta.

3) Valitse $p(z) = z^3 + \frac{3}{2} z^2 + z - 1$. Tämä on kolmannen asteen polynomi. Jos kyseessä olisi pelkästään polynomi z^3, yhtä vihreän pisteen kierrosta vastaisi punaisen pisteen kierto origon ympäri kolmeen kertaan. Totea, että myös tässä tapauksessa punainen piste kiertää origon kolmeen kertaan, *kunhan r on valittu kyllin suureksi*. Tämä johtuu siitä, että termi $\frac{3}{2} z^2 + z - 1$ on itseisarvoltaan pienempi kuin $\left| z^3 \right| = \mathrm{r}^3$, kun r valitaan kyllin suureksi. Vertaa tilanteeseen, jossa kuljet koiran kanssa origon ympäri etäisyydellä r^3 origosta. Jos koiran hihnan pituus on alle r^3, se kiertää origon yhtä moneen kertaan kuin sinä riippumatta siitä, miten se mutkittelee. **Osoita analyyttisesti**: Edellä sanottu pätee myös astetta n olevalle reaali- tai kompleksikertoimiselle polynomille.

4) Pienennä sädettä r. Koska $a_0 \neq 0$, musta käyrä kutistuu pisteeseen a_0 ja origo jää jossakin vaiheessa sen ulkopuolelle.

5) Koska mustan käyrän kutistuminen on jatkuvaa (ilman hyppyjä tai käyrän katkeamista), jollakin arvolla r sen tulee kulkea origon kautta. Tällöin punainen piste voidaan siirtää origoon parametria t muuttamalla, ts. funktion arvo tulee nollaksi. Vastaava vihreä piste antaa funktion nollakohdan. *Polynomilla on siis ainakin yksi nollakohta!* **Ongelma**: Tulos on havainnollisesti ajatellen ilmeinen, mutta mikä olisi se käyrän muuntumista (kutistumista) koskeva lause, joka takaa, että origon kautta kulkeva käyrä löytyy?

6) Määritä demonstraation avulla polynomin $z^3 + \frac{3}{2} z^2 + z - 1$ nollakohtien likiarvot hakemalla sopiva r ja sopiva t kussakin tapauksessa. Säätimiä r ja t pääsee siirtämään yhden sadasosan tarkkuudella napauttamalla ensin säätimien oikealla puolella olevaa plusmerkkiä, jolloin aukeaa lisää säätömahdollisuuksia.

- **Tehtävä**

Tutki muiden valikossa olevien polynomien nollakohtia vastaavalla tavalla ja määritä kokeilemalla niiden nollakohdat. Ratkaise myös nollakohtien tarkat arvot mahdollisuuksien mukaan.