Simo K. Kivelä, 25.7.2009

Algebran peruslause

Algebran peruslauseen mukaan jokaisella vähintään ensimmäistä astetta olevalla polynomilla

$$p(z) = a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + a_{n-2}\,z^{n-2} + \ldots + a_1\,z + a_0$$

on ainakin yksi nollakohta kompleksitasossa. Kertoimet a_k ovat reaali- tai kompleksilukuja. Lauseen todisti Carl Friedrich Gauss väitöskirjassaan vuonna 1799. Sittemmin sille on esitetty monia erilaisia todistuksia. Gauss itsekin esitti kaikkiaan viisi. Alla oleva muunneltava demonstraatio antaa erään todistuksen idean.

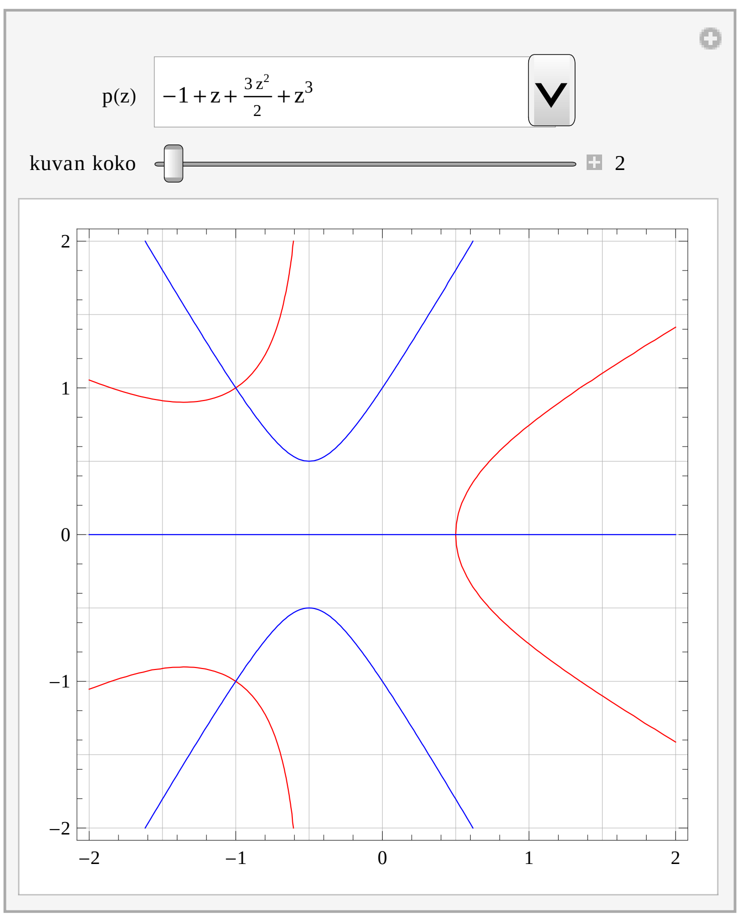
Kun polynomiin p sijoitetaan $z = x + i\,y$ ja se jaetaan reaali- ja imaginaariosiinsa, saadaan periaatteessa muoto

$$p(z) = P(x,\ y) + i\,Q(x,\ y).$$

Ehto $p(z) = 0$ on tällöin yhtäpitävä ehtojen $P(x,\ y) = 0$ ja $Q(x,\ y) = 0$ kanssa. Nämä esittävät xy-tason käyriä, jolloin ratkaisun z olemassaolo on yhtäpitävää sen kanssa, että käyrillä $P(x,\ y) = 0$ ja $Q(x,\ y) = 0$ on ainakin yksi leikkauspiste.

Demonstraatiossa on piirretty xy-tasoon käyrät $P(x,\ y) = 0$ ja $Q(x,\ y) = 0$; edellinen on punaisella, jälkimmäinen sinisellä.

Tarkasteltava polynomi voidaan valita listasta ja tarkastelualueen kokoa voidaan muuttaa liukusäätimellä.



Tehtäviä

1) Tutki, millainen kuvio syntyy valikon polynomeista. Tarkastele sekä melko suppeaa aluetta että mahdollisimman laajaa. Mitä yhteisiä piirteitä eri polynomien kuvioilla on?

2) Määritä kuvion perusteella likiarvot polynomien nollakohdille. Ratkaise myös tarkat arvot, mikäli mahdollista.

3) Kuinka monta leikkauspistettä punaisilla ja sinisillä käyrillä enintään voi olla?

4) Onko mahdollista löytää tilanne, jossa leikkauspisteitä ei ole lainkaan? Millaisia asioita pitäisi todistaa, jotta kuvion idealla saataisiin todistus algebran peruslauseelle?