Simo Kivelä, 23.2.2009

Funktion jatkuvuus

Funktion f sanotaan olevan jatkuva pisteessä a, jos seuraava ehto pätee:

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,(\,|\,x - a\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon)\,.$$

Toisin sanoen: Jokaista positiivilukua ε kohden tulee löytyä sellainen positiiviluku δ, että jos muuttujan arvojen x ja a etäisyys on pienempi kuin δ, on vastaavien funktionarvojen etäisyys pienempi kuin ε. Funktionarvot tulee siis voida puristaa miten lähelle toisiaan tahansa puristamalla muuttujien arvot riittävän lähelle toisiaan.

ε = epsilon, δ = delta.

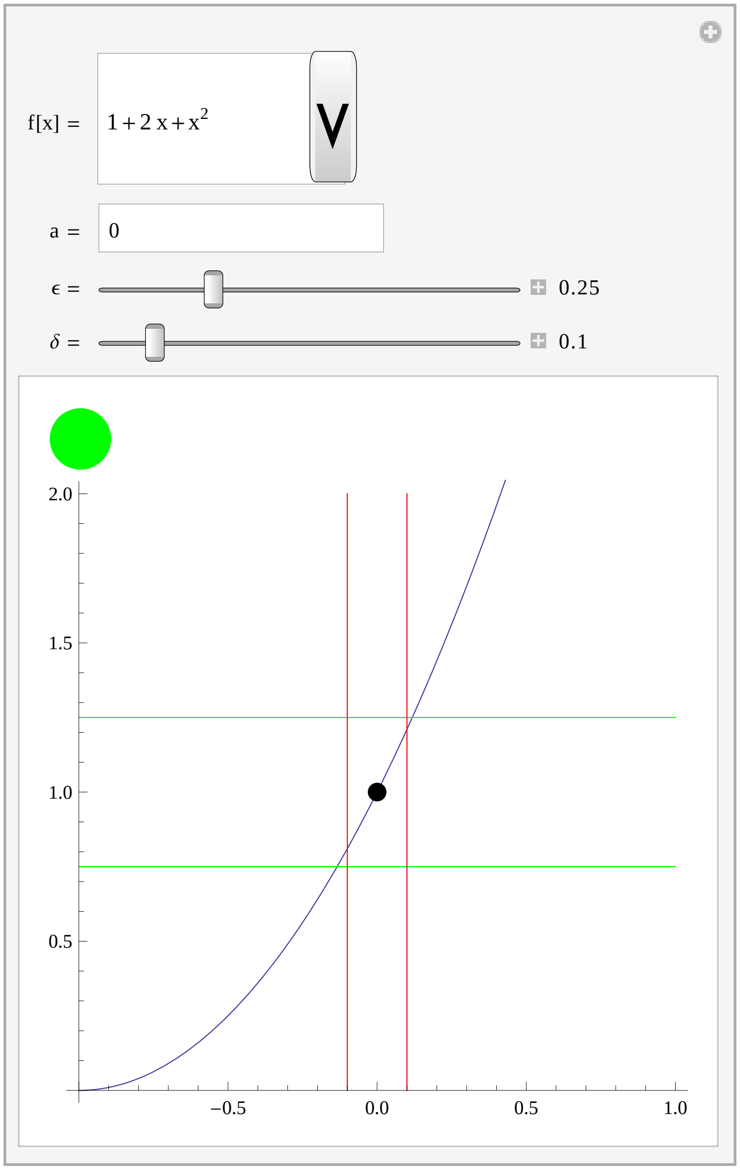
Kyseessä on peli: Minä annan sinulle epsilonin. Sinun on onnistuttava antamaan jokin delta, jolla ehto toteutuu. Jos yhdenkin epsilonin kohdalla epäonnistut, funktio ei ole jatkuva.

Seuraava interaktiivinen animaatio pyrkii havainnollistamaan tätä. Tarkasteltava funktio voidaan valita muutaman funktion kokoelmasta; kolme näistä on jatkuvia, kaksi epäjatkuvia tarkastelupisteessä $a = 0$. Tarkastelupistettä voidaan muuttaakin.

Varsinainen peli muodostuu siten, että ensin valitaan liukusäätimellä jokin ε. Tämän jälkeen etsitään liukusäädintä käyttäen valittuun lukuun ε sopiva δ. Vasemman ylänurkan täplä on punainen, jos δ ei toteuta vaadittua ehtoa, ja muuttuu vihreäksi, kun δ kelpaa. Luku δ ei ole yksikäsitteinen: jos jokin luku kelpaa, myös sitä pienemmät luvut kelpaavat.

Kuviossa vihreät viivat rajaavat funktionarvon $f(a)$ ε-säteistä ympäristöä, punaiset viivat vastaavasti muuttujanarvon a δ-säteistä ympäristöä.

Jos funktio on pisteessä a jatkuva, mitä tahansa lukua ε vastaava δ löytyy. Jos funktio on epäjatkuva, on olemassa jokin ε (yleensä pieni), jota vastaavaa kelvollista lukua δ ei löydy. Epäjatkuvan funktion tapauksessakin riittävän isoja lukuja ε vastaamaan usein löytyy kelvollinen δ; oleellista onkin, löytyykö δ *jokaiselle* luvulle ε.



- **Tehtäviä**

1) Määritä kuvion perusteella luvun ε arvoja 0.1, 0.2, 0.3, ... vastaavat mahdollisimman suuret luvut δ, mikäli tällaiset ovat olemassa. Tarkastele erikseen jokaista animaatiossa määriteltyä funktiota.

2) Millä luvun ε arvoilla vastaava δ löytyy animaation epäjatkuvuustapauksissa?

3) Onko mahdollista määritellä epäjatkuva funktio, jolla mitään lukua ε kohden ei löydy vastaavaa lukua δ?

4) Lukujen ε ja δ välisen analyyttisen riippuvuuden etsiminen johtaa yleensä suhteellisen hankalaan epäyhtälöiden käsittelyyn. Yksinkertaisessa tapauksessa tämä voi olla helppoakin: Määritä δ funktiona luvusta ε, kun $f(x) = 3|x|$, $a = 0$.

- **Huomautus**

Animaatiossa luvun δ kelpoisuus tarkistetaan numeerisesti laskemalla pisteen a δ-säteisessä ympäristössä sata tasavälistä funktion arvoa. Lukujen ε ja δ välistä analyyttista riippuvuutta ei siis etsitä. Tällöin saavutettava tarkkuus lienee yleensä riittävä, vaikka ehkä onkin mahdollista löytää esimerkkejä, joissa menetelmä antaa vääriä tuloksia.