

Kaoottinen Newtonin iteraatio

Muotoa $f(x) = 0$ oleva yhtälö voidaan yleensä ratkaista Newtonin iteraatiolla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

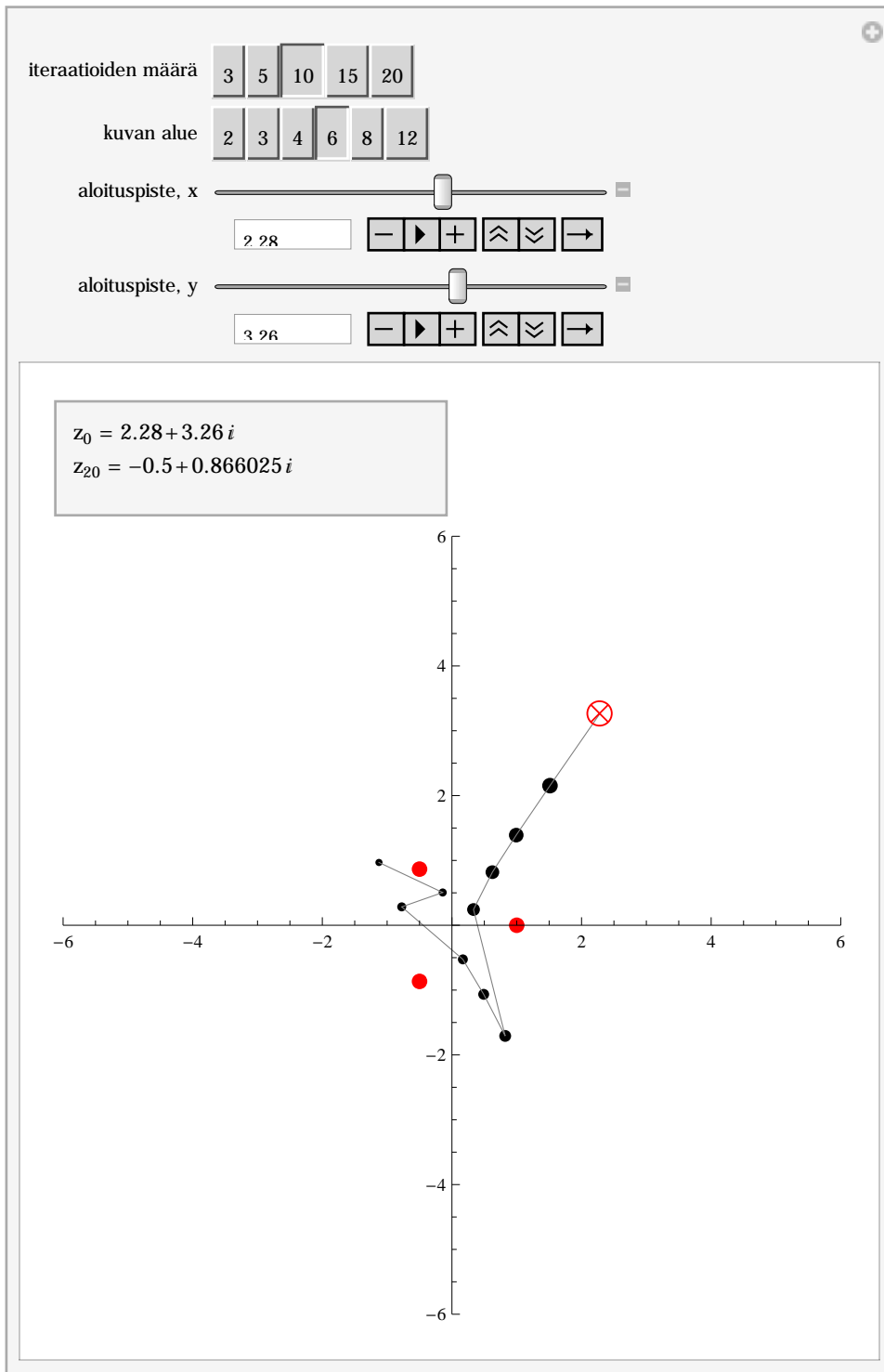
kunhan aloitusarvo x_0 valitaan kyllin läheltä etsittävää ratkaisua. Iteraatiokaava johdetaan yleensä vain reaalialueella, mutta se toimii paljon yleisemminkin: kyseessä voi esimerkiksi olla derivoituva kompleksifunktio f , jonka kompleksisia nollakohtia etsitään.

Miten iteraatio sitten toimii, jos aloitetaan mielivaltaisesta pisteestä, joka ei välttämättä ole lähellä mitään yhtälön ratkaisua?

Alla oleva esimerkki käsittelee polynomi yhtälöä $z^3 - 1 = 0$ kompleksitasossa. Tällä on kolme juurta: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $z_3 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$. Nämä on merkitty punaisilla pisteillä. Iteraation aloituspiste on merkitty punaisella symbolilla \otimes , ja sitä voidaan siirtää hiirellä. Vaihtoehtoisesti aloituspisteen koordinaatteja voidaan muuttaa liukusäätimillä tai niiden alla olevilla painikkeilla. Koordinaatit voidaan myös antaa syöttökenttiin numeerisesti; tämä ei toimi Mathematica Playerissa. Iteraation peräkkäiset approksimaatiot — iteraatit — on esitetty pienenevillä mustilla pisteillä, jotka järjestyksen osoittamiseksi on yhdistetty murtoviivalla. Aloituspisteen sijainnista riippuen iteraatit poukkoilevat yllättävilläkin tavoilla.

Esitettävien iteraattien määrä ja kuva-alueen koko voidaan valita painikkeilla. Kuvan yläpuolella olevassa taulussa esitetään aloituspiste kompleksilukuna, samoin 20. iteraatti. (Enempää ei lasketa eikä määrää voida muuttaa.)

Lukija siirrelköön aloituspistettä ja tutkikoon iteraatioprosessin kaoottisuutta!



■ Tehtäviä

1) Määritä suurin piirtein ne juuria (punaiset pisteet) ympäröivät alueet, joista lähettäessä iteraatio nopeasti suppenee kohden kyseistä juurta.

- 2) Paina näyttöpaneelin oikeassa ylänurkassa olevaa plusmerkkiä ja valitse avautuvasta valikosta `init1`, `init2` tai `init3`. Näihin on valmiiksi määritelty aloituspiste. Huomio?
- 3) Tasossa on alueita, joissa hyvinkin lähellä toisiaan olevista aloituspisteistä lähdettäessä iteraatio suppenee kohden eri juuria. Missä tällaisia alueita on?
- 4) Jos aloituspiste on reaaliakselilla, kaikki iteraatit ovat reaaliakselilla ja ainakin näyttävät suppenevan kohti reaalista juurta $z = 1$. Löytyykö kahden muun juuren tapauksissa reaaliakselia vastaavaa suoraa, jolla kaikki iteraatit ovat?
- 5) Suppeneeko iteraatio aina kohden jotakin juurta aloituspisteestä riippumatta?
- 6) Kokeile valmiiksi määriteltyjä vaihtoehtoja `init4` ja `init5`. Mitä tapahtuu?