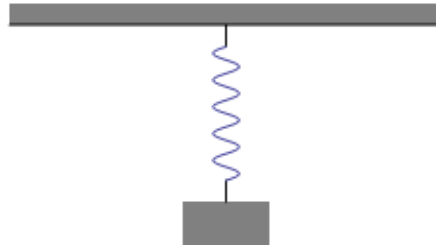


Värähtelyprobleema

Klassisessa värähtelyprobleemassa on tapana tarkastella systeemiä, joka muodostuu kierrejouseen ripustetusta kappaleesta. Jousi on yläpäästään kiinnitetty kiinteään rakenteeseen:



Jos kappaleen massa on m ja jousen jäykkyyttä kuvaa vakio k (jousivakio), voidaan kappaleen pystysuora värähtelyliike mallintaa differentiaaliyhtälöllä

$$m x''(t) = -k x(t),$$

missä $x(t)$ kuvaa kappaleen pystysuoraa poikkeamaa tasapainoasemasta ajan funktiona.

Tällöin on oletettu, että väliaine ei aiheuta vastusta kappaleen liikkeelle. Jos sen sijaan kappale värähtelee esimerkiksi vesiastiassa, tarvitaan väliaineen vastuksesta aiheutuva lisätermi. Vastus on luonnollista mallintaa siten, että se on verrannollinen kappaleen nopeuteen, jolloin differentiaaliyhtälö saa muodon

$$m x''(t) = -c x'(t) - k x(t).$$

Tämä on lineaarinen ja homogeeninen vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Kappaleeseen voidaan kohdistaa myös ulkoinen jaksollinen voima, joka voimistaa tai hillitsee kappaleen liikettä. Jos voiman amplitudi on F ja taajuus ω , saadaan differentiaaliyhtälöön vielä yksi lisätermi:

$$m x''(t) = -c x'(t) - k x(t) + F \sin(\omega t).$$

Yhtälöstä on tällöin tullut epähomogeeninen.

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisussa on yleensä kaksi määräämätöntä vakiota. Jotta ratkaisu olisi yksikäsitteinen, ts. vakioille saadaan määritetyksi arvot, tarvitaan lisäehtoja. Luonnollisimmin nämä ovat *alkuehtoja*, jotka kuvaavat värähtelevän kappaleen tilan alkuhetkellä $t = 0$: annetaan kappaleen sijainnin ja nopeuden *alkuarvot* $x(0)$ ja $x'(0)$.

Alla olevasta paneelista voidaan asettaa alkuarvot ja yhtälön vakioiden arvot. Lisäksi voidaan muuttaa graafisten esitysten alueita. Jokaisen säätimen kohdalla oikealla on plusmerkki, jota napauttamalla aukeaa syöterivi: säätimelle voidaan antaa lukuarvo, muuttaa arvoa askelittain tai käynnistää säätimen animointi.

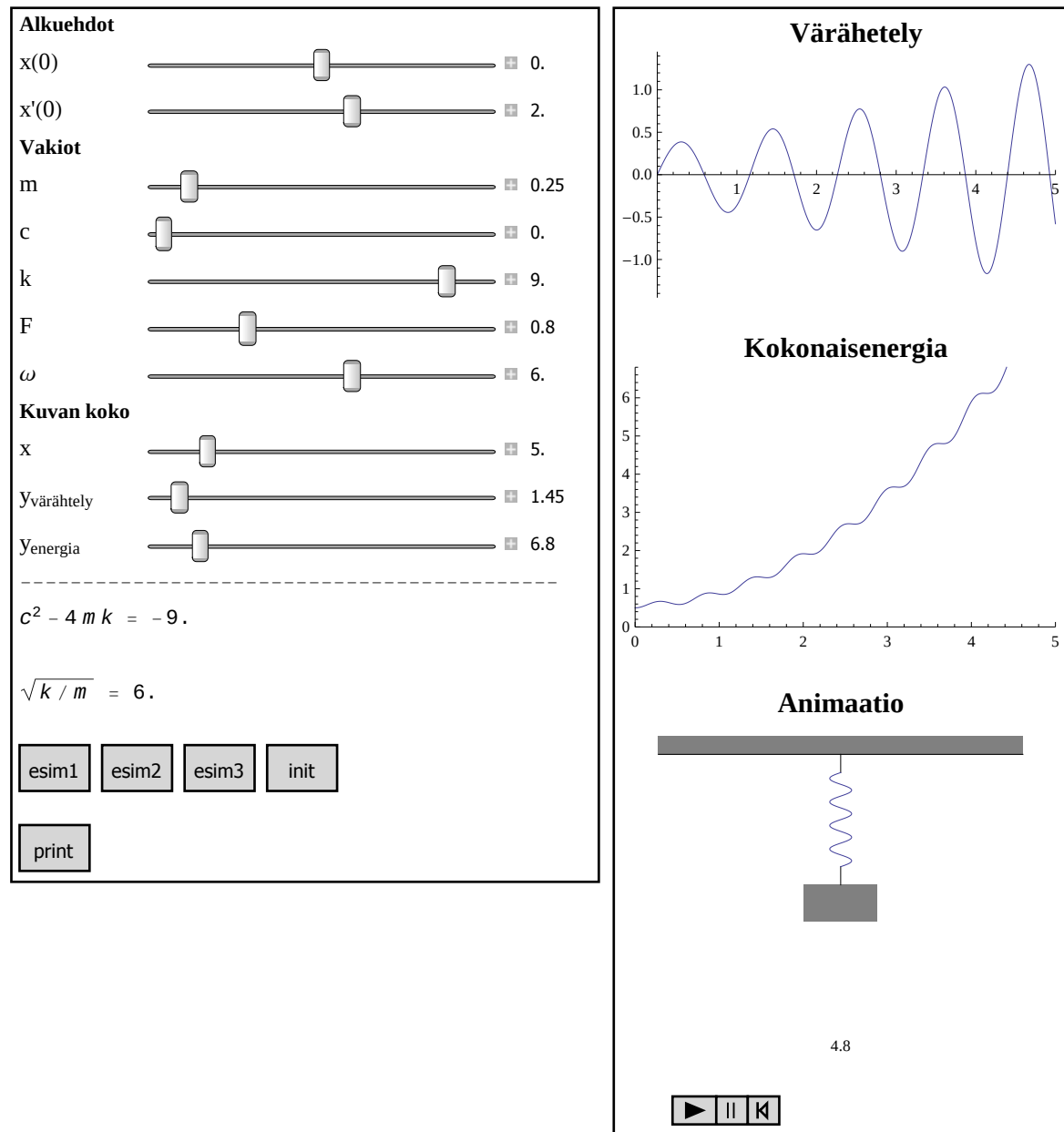
Paneelin alla on kolme painiketta, joista voidaan avata omaan ikkunaansa seuraavat grafiikat:

- 1) **Värähtely** esittää funktion $x(t)$, ts. kappaleen sijainnin ajan funktiona. Kuvaaja muuttuu, kun alkuarvoja tai vakioita muutetaan. Grafiikan alla on nähtävissä kaksi systeemiä karakterisoivaa lukuarvoa: Lauseke $c^2 - 4mk$ kuvaa vapaan systeemin käyttäytymistä; arvo 0 erottaa kvalitatiivisesti erilaiset liikemoodit. Vakio $\sqrt{k/m}$ on systeemin ominaistaajuus. Lukuarvoista on apua etsittäessä värähtelyjen karakteristisia piirteitä.
 - 2) **Energia** esittää systeemin kokonaisenergian (kineettisen ja potentiaalienergian summaa) ajan funktiona. Myös tämä muuttuu, kun alkuarvoja tai vakioita muutetaan.
 - 3) **Animaatio** näyttää kappaleen liikkeen. Tämä käynnistetään ja pysäytetään yläreunassa olevista painikkeista. Animaation aikaväli on sama kuin kahdessa muussa grafiikassa.
- Seuraavan rivin painikkeilla voidaan asettaa kolmen esimerkin alkuarvot ja palauttaa alkuperäiset alkuarvot. Näitä tarkasteltaessa on syytä aluksi säätää grafiikkojen alueet sopiviksi.

Alimman rivin `print`-painikkeella voidaan tulostaa paneelin alapuolelle senhetkiset vakioiden arvot.

Pelkästään lukuarvoja muuttelamalla voi olla vaikeata tutkia systeemin käyttäytymistä. Tätä tekstiä laajempi aiheeseen perehtyminen on tarpeen. Grafiikoiden alapuolella on muutama harjoitustehtävä.

Out[22]=



■ Tehtäviä

- 1) Tutki, miten systeemin käyttäytyminen muuttuu, kun vakio $c^2 - 4 m k$ muuttuu negatiivisesta positiiviseksi. Kuinka monta kertaa funktion $x(t)$ merkki voi vaihtua vakion eri arvoilla?
- 2) Miten kappaleen massa ja jousen jäykkyys vaikuttavat värähtelyyn, jos vaimennusta ei ole?
- 3) Missä tapauksissa systeemin kokonaisenergia on vakio?
- 4) Valitse `esim1`. Miten kokonaisenergia tällöin käyttäytyy? Missä pisteissä kokonaisenergian muutos on pienimmillään? Miten tämä on kvalitatiivisesti selitettävissä?
- 5) Millainen ulkoisen voiman on oltava, jotta systeemin kokonaisenergia kasvaisi rajatta? Tarkastele tapausta `esim2`. Onko rajaton kasvu mahdollista, jos systeemiä vaimennetaan?
- 6) Tarkastele tapausta `esim3`, jossa systeemin amplitudi vaihtelee jaksollisesti. Millaisessa tilanteessa tällainen

ilmiö syntyy? Miten värähtely käyttäytyy, jos systeemiä vaimennetaan?

7) Tutki vaimennettua systeemiä, jossa kappaleeseen vaikuttaa ulkoinen jaksollinen voima. Miten systeemi käyttäytyy ajan kuluessa? Millainen vaikutus alkuehdoilla on?

8) Ratkaise differentiaaliyhtälö analyyttisesti eri tapauksissa ja tutki, miten edellä käsitellyt tapaukset ilmenevät analyyttisestä ratkaisusta.