Simo K. Kivelä, 15.7.2004

Integraalifunktioista

Lähtökohtana olkoon seuraava ongelma:

Laske Mathematicalla integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(x)+2}\, dx$$

kolmella eri tavalla: a) suoraan määrättynä integraalina symbolisesti, b) numeerisesti, c) muodostamalla ensin integraalifunktio ja sijoittamalla rajat tähän. Selitä, miksi tulokset eroavat.

Ratkaisu

Talletetaan funktion lauseke aluksi sopivalle nimelle:

```
In[1]:= fkt = 1 / (Cos[x] + 2)
```

Out[1]= $\frac{1}{2+\mathrm{Cos}[x]}$

Suora määrätyn integraalin laskeminen antaa

```
In[2]:= a = Integrate[fkt, {x, 0, 2 Pi}]
```

Out[2]= $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Numeerisella integroinnilla saadaan

```
In[3]:= b = NIntegrate[fkt, {x, 0, 2 Pi}]
```

Out[3]= 3.6276

Nämä ovat suurella tarkkuudella samat:

```
In[4]:= a - b
```

Out[4]= -2.33102×10^{-12}

Integraalifunktio on

```
In[5]:= intfkt = Integrate[fkt, x]
```

Out[5]= $\frac{2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\mathrm{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}}$

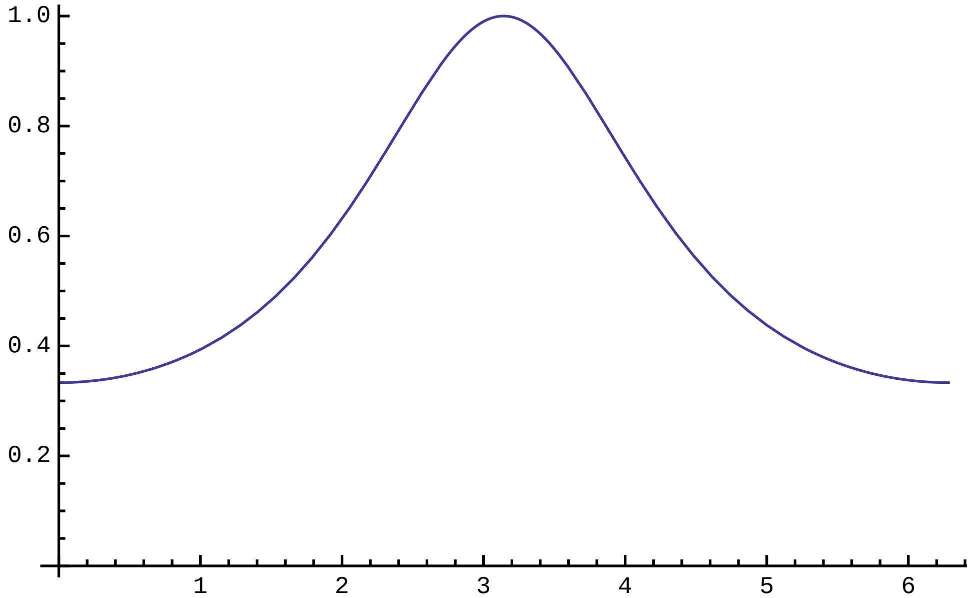
Sijoittamalla tähän rajat saadaan

In[6]:=
```
c = (intfkt /. x → 2 Pi) - (intfkt /. x → 0)
```
Out[6]= 0

mikä selvästi poikkeaa edellä saaduista tuloksista.

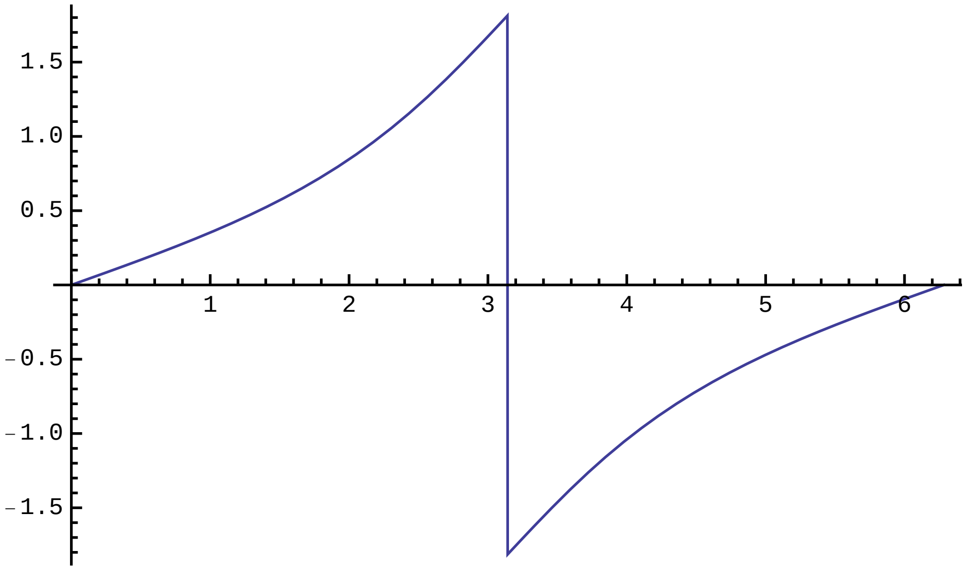
Selitykset

Integroitavan funktion kuvaaja näyttää seuraavalta:

In[7]:=
```
Plot[fkt, {x, 0, 2 Pi}, AxesOrigin → {0, 0}]
```
Out[7]=


Funktion arvot ovat integroimisvälillä kaikkialla posiiivisia, joten integraalinkin on oltava positiivinen. Kohdan c mukainen vastaus (= 0) ei siis voi olla oikea. Syy tähän on nähtävissä piirtämällä integraalifunktion kuvaaja:

In[8]:= `Plot[intfkt, {x, 0, 2 Pi}, AxesOrigin → {0, 0}]`

Out[8]=


Integraalifunktion pitää olla jatkuva, mutta saadulla integraalifunktiolla on selvästi hyppyepäjatkuvuus pisteessä $x = \pi$. Lauseke sellaisenaan ei siis ole pätevä koko integroimisvälillä. Integraalifunktioon kuitenkin liittyy määräämätön vakio. Jos tämä valitaan sopivasti eri tavoin eri osaväleillä, funktiosta saadaan jatkuva. Tällä tavoin muokattu integraalifunktio antaakin oikean tuloksen!

Harjoitustehtäviä

1) Määritä integraalifunktioon liittyvä vakio eri osaväleillä siten, että funktiosta tulee jatkuva. Piirrä sen kuvaaja ja laske integraali tätä integraalifunktiota käyttäen.

2) Mathematica tuntee *Diracin deltafunktion* nimellä `DiracDelta`. Tutki tämän arvoja välillä $[-1, 1]$ ja erityisesti origossa. Etsi sen integraalifunktio ja laske määrätty integraali välin $[-1, 1]$ yli. Millä tavoin tulokset ovat ristiriidassa määrätyn integraalin määrittelyn kanssa? Selitys ristiriitaan on, että deltafunktio nimestään huolimatta ei ole funktio vaan ns. *distribuutio* eikä sen integrointi merkinnöistä huolimatta ole integraalin määrittelyn mukaista integrointia. Asiaa käsittelee *distribuutioteoriaksi* kutsuttu matematiikan osa-alue (jota ei tule sekoittaa tilastomatematiikkaan!).