The Sage Notebook
Version 4.8

admin Toggle | Home | Published | Log | Settings | Help | Report a Problem | Sign out

pitkä yo 2011 kevät

last edited on January 30, 2012 04:58 PM by admin

Save | Save & quit | Discard & quit

File... Action Data... sage Typeset Print Worksheet Edit Text Undo Share Publish

Kevään 2011 ylioppilaskoe

Ratkaisut Sage-ohjelmalla: Mikko Rahikka m miuku hyl.fi

Ratkaisun apuna käytetty MAOL:n pisteytysohjetta ja Hesarissa ollutta ratkaisutiedostoa.

Tarkoituksena on osoittaa miten symbolista laskentaa voi käyttää ratkaisun apuna.

Tehtävä 1

```
# 1a)
yht = 2/x==3/(x-2)
yht
```

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}$$

```
solve(yht, x)
```

$$[x = (-4)]$$

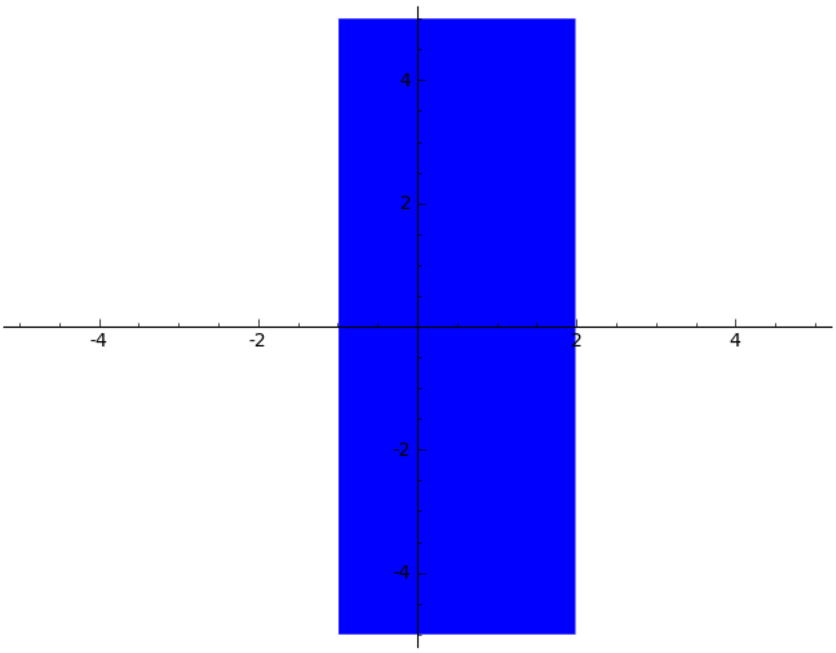
```
# 1 b)
yht = x^2-2 <= x
yht
```

$$x^2 - 2 \leq x$$

```
solve(yht,x)
```

$$[[x \geq (-1), x \leq 2]]$$

```
region_plot(yht, (-5,5), (-5,5))
```



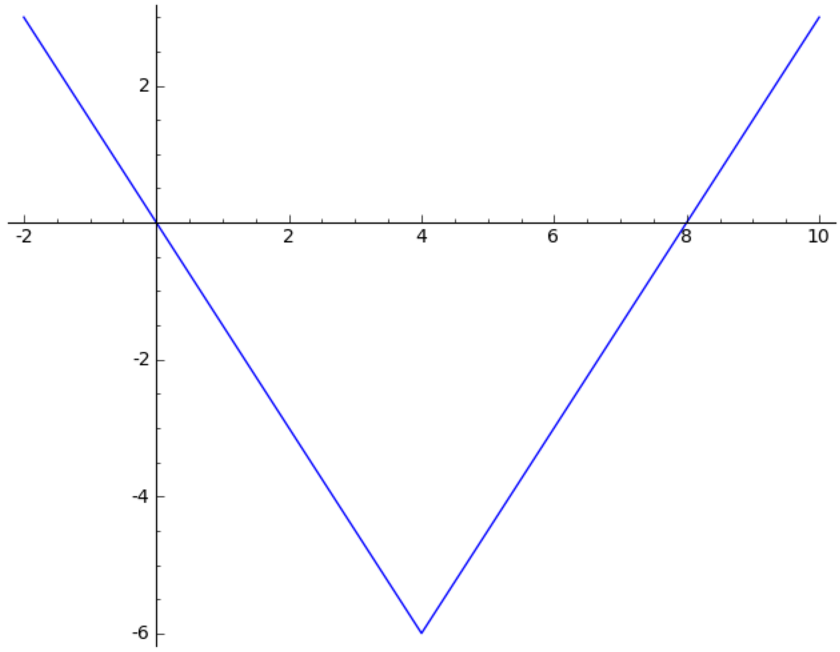
```
#1 c)
yht = abs(3/2*x-6)==6
yht
```

$\left|\frac{3}{2}\,x - 6\right| = 6$

```
solve(yht, x)
```

$\left[\frac{1}{2}\,\left|3\,x - 12\right| = 6\right]$

```
# Sage ei osannut ratkaista itseisarvoyhtälöä, piirretään kuvaaja
plot(yht,x, -2,10)
```




```
#ratkaistaan numeerisesti
yht.find_root(-1,1)
```

0.0

```
yht.find_root(1,10)
```

8.0

tehtävä 2

```
# 2 a)
N(1.12*0.9*35.5/35.5 - 1, digits = 4)
```

0.008000

```
# vastaus 0.8 %
```

```
# 2 b)
k=(-3-1)/(5-(-2))
k
```

$-\frac{4}{7}$

```
# 2 c)
e^(5*ln(2)-ln(8))
```

$e^{\left(5\,\log\left(2\right) - \log\left(8\right)\right)}$

```
N(e^(5*ln(2)-ln(8)), digits = 5)
```

4.0000

tehtävä 3

```
# 3a)
f(x) = x*e^(-x^2)
f
```

$x \mapsto xe^{(-x^2)}$

```
g(x)=2*e^(-x^2)
g
```

$x \mapsto 2\,e^{(-x^2)}$

```
solve(f(x) == g(x),x)
```

$[x = 2]$

```
# 3 b)
derivaatta(x) = derivative(f,x)
derivaatta
```

$x \mapsto -2\,x^2 e^{(-x^2)} + e^{(-x^2)}$

```
derivaatta(1)
```

$-e^{(-1)}$

```
# 3 c)
integrate(f, (x, 0,1))
```

$x \mapsto -\frac{1}{2}\,e^{(-1)} + \frac{1}{2}$

tehtävä 4

```
# määritellään muuttujat
var('a b c')
```

(a, b, c)

```
eka = a*0^2 + b*0 + c == 2^0
eka
```

$c = 1$

```
toka = a*1^2+b*1+c==2^1
toka
```

$a + b + c = 2$

```
kolmas = a*2^2+b*2+c==2^2
kolmas
```

$4\,a + 2\,b + c = 4$

```
solve([eka,toka,kolmas],a,b,c)
```

$\left[\left[a = \left(\frac{1}{2}\right), b = \left(\frac{1}{2}\right), c = 1\right]\right]$

```
#vastaus
1/2*x^2+1/2*x+1
```

$\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1$

Paragraph | Font family | Font size

Jostain kumman syystä perinteinen funktion määrittely ei osannut laskea maksimia find_maximum_on_interval-funktiolla. Komento find_minimum_on_interval(f,-1,5) las pienimmän numeerisesti.

Sage antaa tuloksen muodossa (funktion arvo, muuttujan arvo). Laiskuuksissani en derivoi.

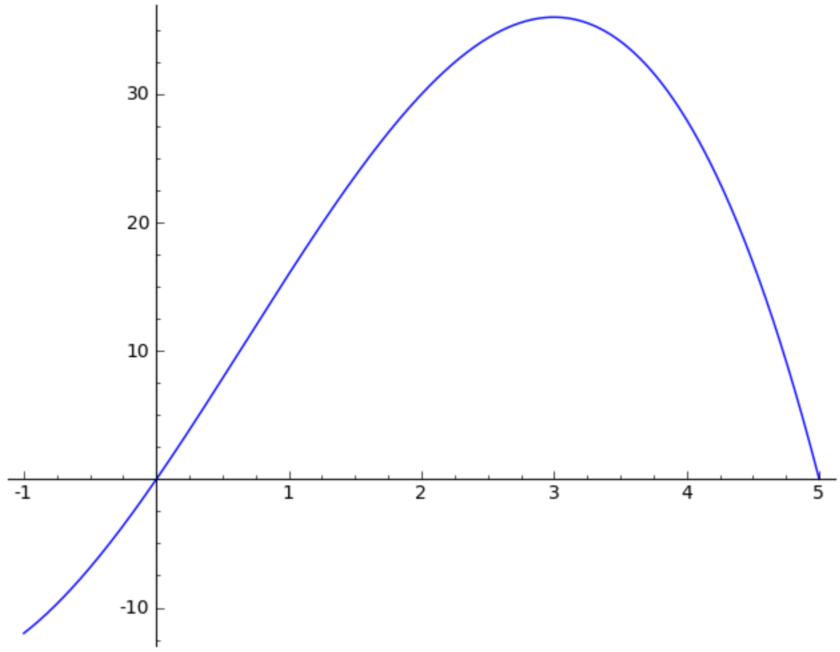
Path: p

Save changes | Cancel changes

```
f = lambda x: x*(x+3)*(5-x)
f
```

```
<function <lambda> at 0x1104532a8>
```

```
plot(f(x),x, -1,5)
```




```
find_minimum_on_interval(f,-1,5)
```

$(-11.9999998187, -0.99999997734)$

```
pienin = f(-1)
pienin
```

-12

```
find_maximum_on_interval(f,-1,5)
```

$(36.0, 3.00000000543)$

```
suurin = f(3)
suurin
```

36

tehtävä 6

```
binomial(10,3)
```

120

```
# yksi oikein
binomial(3,3)*binomial(7,0)
```

1

```
# kaksi
binomial(3,2)*binomial(7,1)
```

21

```
#yksi
binomial(3,1)*binomial(7,2)
```

63

```
# nolla
binomial(3,0)*binomial(7,3)
```

35

```
# vastaavat tn:t
[1/120,21/120,63/120,35/120]
```

$\left[\frac{1}{120}, \frac{7}{40}, \frac{21}{40}, \frac{7}{24}\right]$

tehtävä 8

```
aste = pi()/180
```

```
yht = 1/sin(36*aste)==x/sin(72*aste)
yht
```

$$\frac{1}{\sin(\frac{1}{5}\,\pi)} = \frac{x}{\sin(\frac{2}{5}\,\pi)}$$

```
ratkaisu=yht.find_root(0,10)
ratkaisu
```

1.61803398875

```
#leijan ala
N(ratkaisu*sin(72*aste),digits = 4)
```

1.539

```
#nuolen ala
N(ratkaisu*sin(36*aste),digits = 4)
```

0.9511

tehtävä 8

lasken perinteisesti, vektoreilla menisi varmaan tyylikkäämmin

```
var('u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 t')
yht1 = 4==u_1+v_1
yht2 = -5==u_2+v_2
yht3 = 3== u_3+v_3
yht4 = (4-t*2)*2+(-5-t*1)*1+(3-t*(-2))*(-2)==0
yht5 = u_1 == t*2
yht6 = u_2 == t*1
yht7 = u_3 == t*(-2)
```

$$\left[\left[u_{1} = \left(-\frac{2}{3}\right), u_{2} = \left(-\frac{1}{3}\right), u_{3} = \left(\frac{2}{3}\right), v_{1} = \left(\frac{14}{3}\right), v_{2} = \left(-\frac{14}{3}\right), v_{3} = \left(\frac{7}{3}\right), t = \left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right]$$

tehtävä 9

```
q=-3/4
5/4*q^(n-1)
```

$$\frac{5}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)^{(n-1)}$$

```
expand(5/4*q^(n-1))
```

$$-\frac{5}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n}$$

```
#summa
5/4*1/(1+3/4)
```

$$\frac{5}{7}$$

tehtävä 10

```
integrate(sin(x), (x, 0,pi))-integrate(sin(x), (x, pi, 2*pi))
```

4

tehtävä 11

```
#a)
var('a')
a*(-1)^2==(-1)^2/(1+(-1)^2)
```

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)$$

```
#b)
f=derivative(1/2*x^2)
g=derivative((x)^2/(1+(x)^2))
f, g
```

$\left(x, -\frac{2\,x^3}{(x^2+1)^2} + \frac{2\,x}{x^2+1}\right)$

```
print f.limit(x = -1, dir='-')
print g.limit(x = -1, dir='+')
```

```
-1
-1/2
```

```
print f.limit(x = -1, dir='-')
```

```
#c)
f=(x)^2/(1+(x)^2)
f
```

$\frac{x^2}{x^2+1}$

```
f.limit(x = oo)
```

1

tehtävä 12

```
mod(46^78+89^67,5)
```

0

tehtävä 13

```
factor(2*x^4-x^3+x^2-x-1)
```

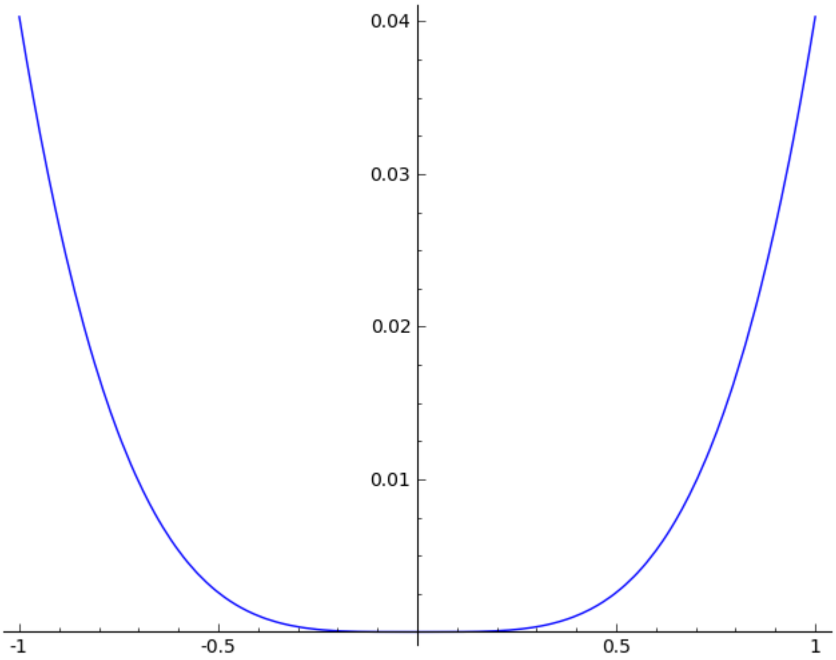
$(x-1)(2\,x+1)(x^2+1)$

tehtävä 14

```
solve(cos(x)==(1-x^2/2),x)
```

$\left[x = -\sqrt{-\cos(x)+1}\sqrt{2}, x = \sqrt{-\cos(x)+1}\sqrt{2}\right]$

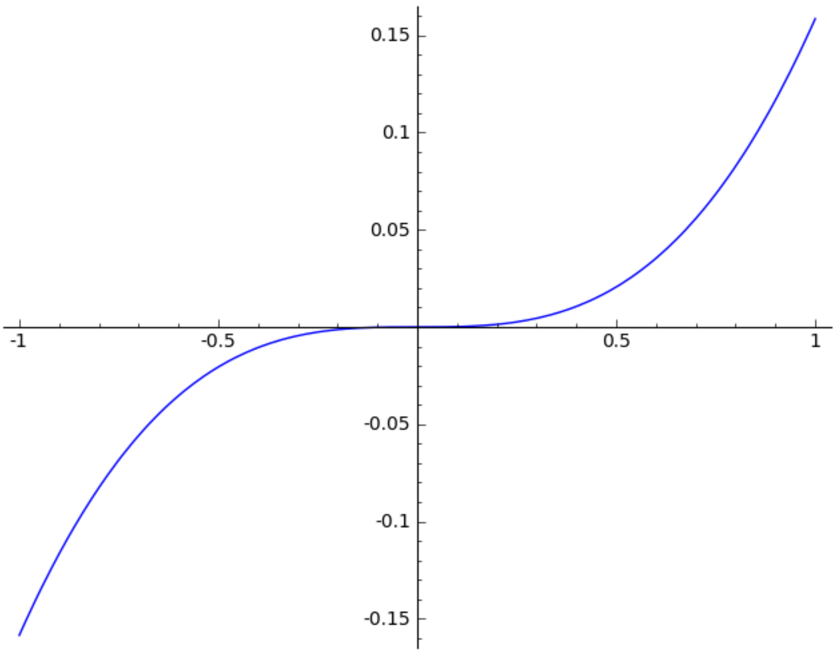
```
plot(cos(x)-(1-x^2/2),-1,1)
```




```
derivative(cos(x)-(1-x^2/2),x)
```

$x - \sin(x)$

```
plot(x-sin(x))
```




```
solve(x-sin(x)==0,x)
```

$[x = \sin(x)]$

```
(x==sin(x)).find_root(-10,10)
```

0.0

```
#tuosta näkynee että kyseessä minimi nollassa
```

```
#b
(cos(x)==(1-x^2/2)).find_root(-10,10)
```

$1.52498109257 \times 10^{-08}$

```
#herää epäilys että tuo on nolla
```

```
#c)
f(x)=cos(x)-(1-x^2/2)
find_maximum_on_interval(f,-pi,pi)
```

$(2.93480199702, -3.14159258881)$

```
N(1/2*pi^2-2)
```

2.93480220054468

```
#d
integrate(f, (x, -pi,pi))
```

$x \mapsto -2\pi + \frac{1}{3}\pi^3$

tehtävä 15

```
#15 a)
var('x y t R')
solve(t^2+(t^2-R)^2 == R^2,R)
```

$\left[R = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right]$

```
#b)
h(t)=1/2*t^2+1/2
h.limit(t = 0, dir='+')
```

$t \mapsto \frac{1}{2}$

```
#c)
solve(x^2+(y-R_0)^2==R_0^2, y)
```

$\left[y = R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2}, y = R_0 + \sqrt{R_0^2 - x^2}\right]$

```
g(x)=1/2-sqrt((1/2)^2-x^2)
g
```

$x \mapsto -\sqrt{-x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

```
#d)
g(x)=R_0-sqrt(R_0^2-x^2)
dg(x)=derivative(g(x),x)
dg
```

$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{R_0^2 - x^2}}$

```
ddg=derivative(dg,x)
ddg
```

$x \mapsto \frac{x^2}{\left(R_0^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{R_0^2 - x^2}}$

```
ddg(0)
```

$\frac{1}{\sqrt{R_0^2}}$

```
expand(ddg(0))
```

$\frac{1}{\sqrt{R_0^2}}$

```
f(x)=x^2
```

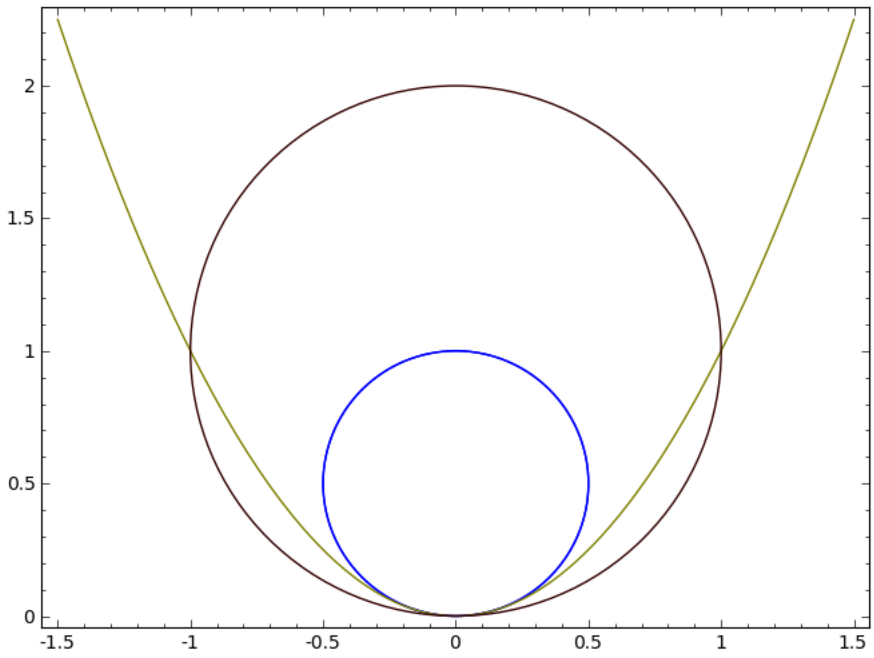
```
ddf=derivative(derivative(f,x),x)
ddf
```

$x \mapsto 2$

```
R_0=1/2
1/R_0
```

2

```
p1 = plot(x^2,-1.5,1.5, rgbcolor=(0.5,0.5,0))
p2 = circle((0,1), 1, rgbcolor=(0.2,0,0))
p3 = implicit_plot((x^2+(y-R_0)^2-R_0^2),(-1.5, 1.5), (0, 1.5))
show(p1+p2+p3, aspect_ratio=1)
```



evaluate