Tehtävä 1

$\text{solve}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x-2}=0,x\right)$	$x=4$
$\text{solve}\left(x^2-2\leq x,x\right)$	$-1\leq x\leq 2$
$\text{solve}\left(\left\|\frac{3}{2}\cdot x-6\right\|=6,x\right)$	$x=0$ or $x=8$

1.1

Vastaukset:

a) -4

b) $-1 \le x \le 2$

c) $x = 0$ tai $x = 8$

1.2

Tehtävä 2

$a:=35.5$	35.5
$b:=a+\frac{12}{100}\cdot a$	39.76
$c:=b-\frac{10}{100}\cdot b$	35.784
$\frac{100\cdot(c-a)}{a}$	0.8
$k:=\frac{1-{}^-3}{{}^-2-5}$	$\frac{-4}{7}$
$p:=5\cdot\ln(2)-\ln(8)$	$2\cdot\ln(2)$
e^p	4

2.1

Vastaukset:

a) 0.8 %

b) $-\frac{4}{7}$

c) 4

2.2

Tehtävä 3

Define $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$	*Valmis*
Define $g(x)=2\cdot e^{-x^2}$	*Valmis*
solve$(f(x)=g(x),x)$	$x=2$
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=1$	$-e^{-1}$
$\int_0^1 (f(x))\,dx$	$\frac{1}{2}-\frac{e^{-1}}{2}$

3.1

Vastaukset:

a) 2

b) $-\frac{1}{e}$

c) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$

3.2

Tehtävä 4

Define $f(x)=2^x$	*Valmis*
Define $p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$	*Valmis*
$yht:=f(x)=p(x)\vert x=\{0,1,2\}$	$\{1=c,2=a+b+c,4=4\cdot a+2\cdot b+c\}$
$rtk:=\text{solve}(yht,\{a,b,c\})$	$a=\frac{1}{2}$ and $b=\frac{1}{2}$ and $c=1$
$p(x)\vert rtk$	$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1$

4.1

Vaatimalla että funktio 2^x saa kyseisissä pisteissä samat arvot kuin polynomi

ax^2+bx+c saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1=c \\ 2=a+b+c \\ 4=4a+2b+c \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$. Polynomi on siis $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1$.

4.2

Tehtävä 5

Define $f(x)=x\cdot(x+3)\cdot(5-x)$	*Valmis*
$minkohta:=\text{fMin}(f(x),x,^-1,5)$	$x=1$
$f(x)\vert minkohta$	$^-12$
$maxkohta:=\text{fMax}(f(x),x,^-1,5)$	$x=3$
$f(x)\vert maxkohta$	36

5.1

Funktion suurimman ja pienimmän arvon kohta annetulla välillä saadaan funktioilla fMax ja fMin. Vastaavat funktion arvot saadaan sijoittamalla kohdat funktion lausekkeeseen. Vastaus: maksimi 36, minimi −12.

5.2

Tehtävä 6

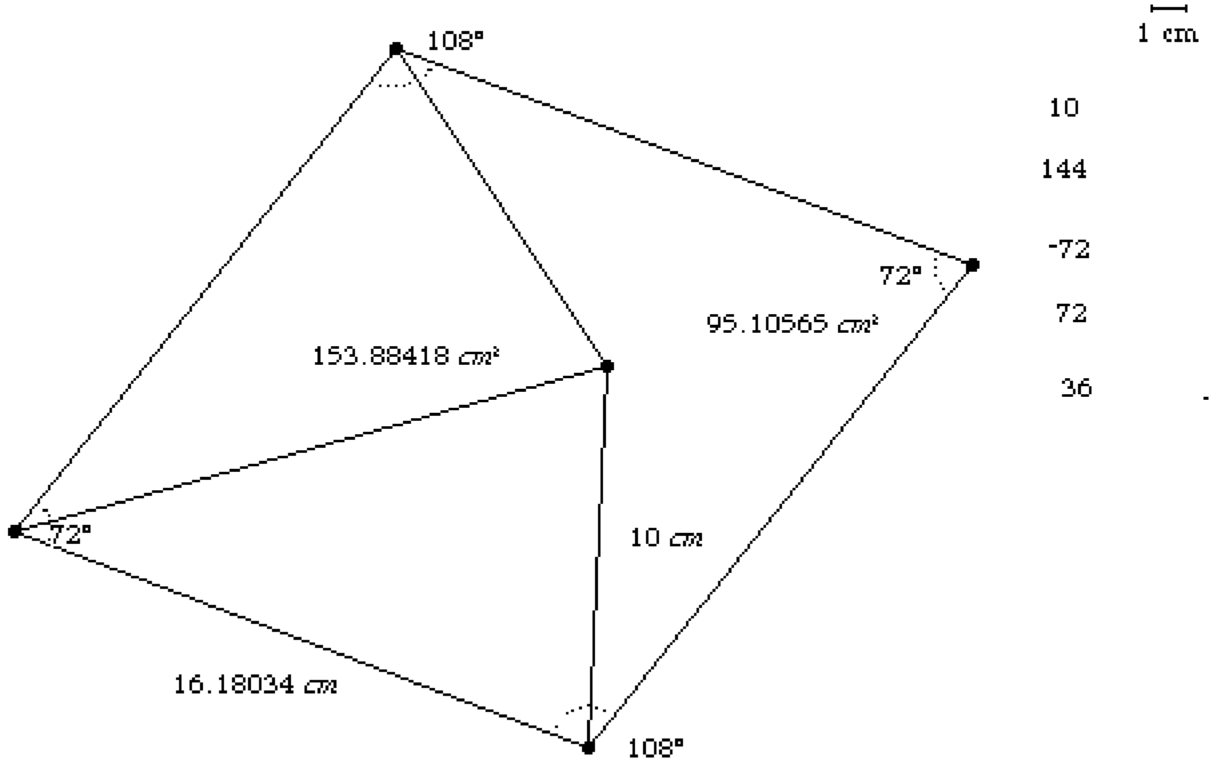
$p0:=\dfrac{\mathrm{nCr}(3,0)\cdot \mathrm{nCr}(7,3)}{\mathrm{nCr}(10,3)}$	$\dfrac{7}{24}$
$p1:=\dfrac{\mathrm{nCr}(3,1)\cdot \mathrm{nCr}(7,2)}{\mathrm{nCr}(10,3)}$	$\dfrac{21}{40}$
$p2:=\dfrac{\mathrm{nCr}(3,2)\cdot \mathrm{nCr}(7,1)}{\mathrm{nCr}(10,3)}$	$\dfrac{7}{40}$
$p3:=\dfrac{\mathrm{nCr}(3,3)\cdot \mathrm{nCr}(7,0)}{\mathrm{nCr}(10,3)}$	$\dfrac{1}{120}$
$p0+p1+p2+p3$	1
$\{p0,p1,p2,p3\}$ ▸Decimal	$\{0.291667,0.525,0.175,0.008333\}$

6.1

Todennäköisyydet saadaan binomikertoimien avulla. Näiden summan tulee olla 1, kuten myös laskemalla todetaan. Todennäköisyyksien kolmidesimaaliset likiarvot: 0.292, 0.525, 0.175, 0.008.

6.2

Tehtävä 7


1 cm
10
144
-72
72
36
108°
72°
95.10565 cm²
153.88418 cm²
72°
10 cm
16.18034 cm
108°

7.1

$a:=1$	1
$ehto:=a^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot \cos(36°)$	$1=\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x^2$
$rtk:=\text{solve}(ehto,x)$	$x=\frac{-\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$ or $x=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$
$b:=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$
b ▸Decimal	1.61803
$leijanala:=a\cdot b\cdot \sin(72°)$	$\frac{(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+5)}}{8}$
$leijanala$ ▸Decimal	1.53884
$nuolenala:=a\cdot b\cdot \sin(36°)$	$\frac{(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{-2\cdot(\sqrt{5}-5)}}{8}$
$nuolenala$ ▸Decimal	0.951057

7.2

Kuvan mukaisesti kulmia laskemalla todetaan, että kuviot yhteen asetettuina muodostavat suunnikkaan, jonka vierekkäiset sivut symmetrian takia ovat yhtä pitkät. Kyseessä on siis neljäkäs. Neljäkkään sivun pituudeksi saadaan kosinilauseesta ratkaisemalla $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \approx 1.618$. (Kuviossa yksikkönä on 1 dm.)

Laattojen pinta−alat saadaan sinilauseella: leija $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)}}{8} \approx 1.539$ ja nuoli $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{-2\cdot\left(\sqrt{5}-5\right)}}{8} \approx 0.951$.

7.3

Tehtävä 8

$a:=\{4,-5,3\}$	$\{4,-5,3\}$
$b:=\{2,1,-2\}$	$\{2,1,-2\}$
$u:=t\cdot b$	$\{2\cdot t,t,-2\cdot t\}$
$v:=\{x,y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$ehto1:=a=u+v$	$\{4=2\cdot t+x,-5=t+y,3=z-2\cdot t\}$
$ehto2:=\mathrm{dotP}(v,b)=0$	$2\cdot x+y-2\cdot z=0$
$ehdot:=\{4=2\cdot t+x,-5=t+y,3=z-2\cdot t,2\cdot x+y-2\cdot z=0\}$	$\{4=2\cdot t+x,-5=t+y,3=z-2\cdot t,2\cdot x+y-2\cdot z=0\}$
$rtk:=\mathrm{solve}(ehdot,\{x,y,z,t\})$	$t=\frac{-1}{3}$ and $x=\frac{14}{3}$ and $y=\frac{-14}{3}$ and $z=\frac{7}{3}$
$\{u,v\}\vert rtk$	$\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

8.1

Kirjoittamalla vektori **u** muotoon t **b** ja pitämällä tuntemattomana vektoria **v** = [x,y,z]

saadaan ehdoista **a** = **u** + **v** ja **b**·**v** = 0 yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4=2\cdot t+x \\ -5=t+y \\ 3=z-2\cdot t \\ 2\cdot x+y-2\cdot z=0 \end{cases}$$

Tämän ratkaisu on $t=\frac{-1}{3}, x=\frac{14}{3}, y=\frac{-14}{3}, z=\frac{7}{3}$. Tällöin vektorit ovat

u = $\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ja **v** = $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$.

8.2

Tehtävä 9

$\text{when}\left(n>1, \frac{-3}{4}\cdot a(n-1), \frac{5}{4}\right)\to a(n)$	*Valmis*
$a(1)$	$\frac{5}{4}$
$a(2)$	$\frac{-15}{16}$
$a(10)$	$\frac{-98415}{1048576}$
$a(100)$	$\frac{-858962534553352218394101882942702121170179203335}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a(n)\right)$	"Virhe: Liian syvä rekursio"
$\text{Define } a(n)=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^{n-1}$	*Valmis*
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a(n)\right)$	$\frac{5}{7}$

9.1

Termit voidaan määritellä rekursiokaavalla funktion when avulla. Yleisen termin lauseketta tai summaa ei tällöin kuitenkaan saada laskimella muodostetuksi.

Omien aivojen käyttö osoittaa, että kyseessä on geometrinen jono suhdelukuna

$q=-\frac{3}{4}$, jolloin yleinen termi on $\mathbf{a}(n)=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^{n-1}$. (Lihavointia en saanut pois!)

Tämän jälkeen onnistuu summeeraus ja tuloksena on $\frac{5}{7}$.

9.2

Tehtävä 10

Define $g(x)=f(x)+\sin(x)$ *Valmis*

$$\int_0^{2\cdot\pi} \left(\left|f(x)-g(x)\right|\right) dx$$ 4.

10.1

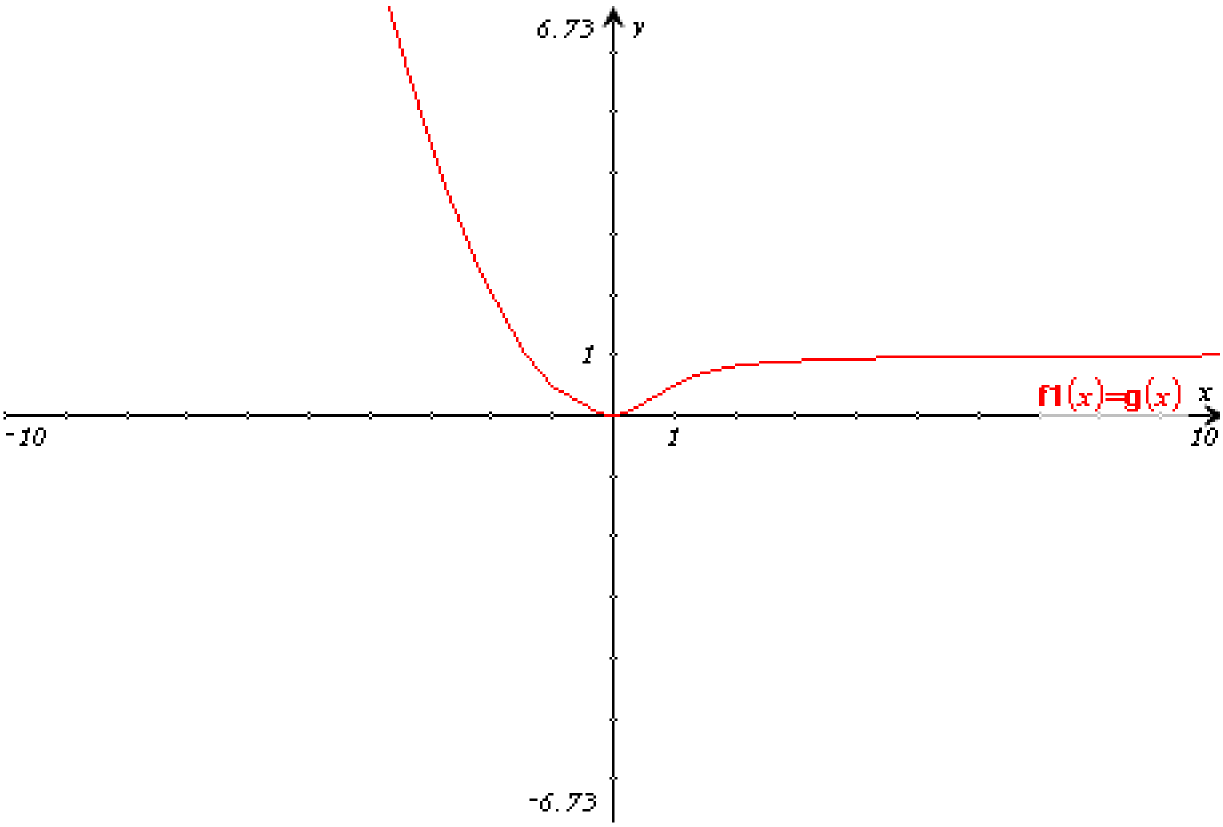
Suora integrointi, tuloksena 4.

10.2

Tehtävä 11

Define $f(x)=\text{when}\left(x\leq -1, a\cdot x^2, \frac{x^2}{1+x^2}\right)$	*Valmis*
$vasen:=\lim\limits_{x\to -1^-}(f(x))$	a
$oikea:=\lim\limits_{x\to -1^+}(f(x))$	$\frac{1}{2}$
$rtk:=\text{solve}(vasen=oikea,a)$	$a=\frac{1}{2}$
Define $g(x)=f(x)\vert rtk$	*Valmis*
$dvas:=\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}\right)$	-1
$doik:=\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}\right)$	$\frac{-1}{2}$

11.1



11.2

Määritellään funktio paloittain when-konstruktiolla ja lasketaan sen vasemman- ja oikeanpuolinen raja-arvo kohdassa $x=-1$. Jotta funktio olisi jatkuva, näiden tulee olla yhtä suuret, jolloin saadaan $a=\frac{1}{2}$.

Sijoitetaan tämä arvo funktion lausekkeeseen. Saatu funktio on derivoituva muualla paitsi mahdollisesti kohdassa $x=-1$. Erotusosamäärän vasemman- ja oikeanpuolinen raja-arvo tässä kohdassa ovat eri suuret, joten funktio ei ole derivoituva.

Funktion **f** raja-arvo äärettömyydessä on 1.

Liitteenä funktion kuvaaja arvolla $a=\frac{1}{2}$.

11.3

Tehtävä 12

$\mathrm{mod}\left(46^{78}+89^{67},5\right)$ 0

12.1

mod-funktio antaa jakolaskun jakojäännöksen. Koska tämä on = 0,
luku on jaollinen 5:llä.

12.2

Tehtävä 13

$poly:=2\cdot x^4-x^3+x^2-x-1$	$2\cdot x^4-x^3+x^2-x-1$
$\mathrm{factor}(poly,x)$	$(x-1)\cdot(2\cdot x+1)\cdot(x^2+1)$
$\mathrm{cFactor}(poly,x)$	$(x-1)\cdot(x+-i)\cdot(x+i)\cdot(2\cdot x+1)$

13.1

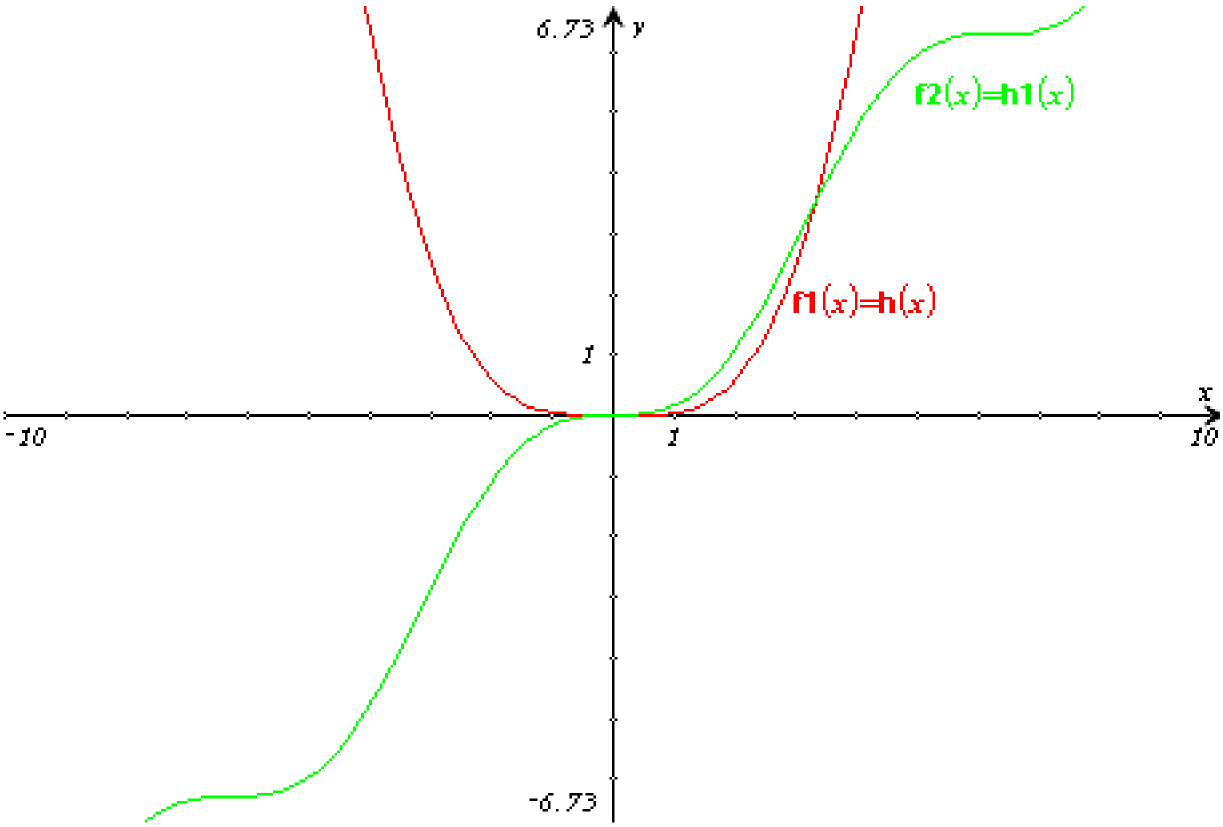
Funktio factor jakaa polynomin mahdollisimman matalaa astetta oleviin reaalisiin tekijöihin. (Funktio cFactor vastaavasti kompleksisiin tekijöihin.)

13.2

Tehtävä 14

Define $f(x)=\cos(x)$	*Valmis*
Define $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$	*Valmis*
Define $h(x)=f(x)-g(x)$	*Valmis*
Define $h1(x)=\frac{d}{dx}(h(x))$	*Valmis*
Define $h2(x)=\frac{d}{dx}(h1(x))$	*Valmis*
$h2(x)$	$1-\cos(x)$
$h1(x)$	$x-\sin(x)$
$h1(0)$	0
$h(0)$	0
$maxkohdat:=\mathrm{fMax}(h(x),x,-\pi,\pi)$	$x=-\pi$ or $x=\pi$
$minkohdat:=\mathrm{fMin}(h(x),x,-\pi,\pi)$	$x=0.$
$maxarvot:=\{h(-\pi),h(\pi)\}$	$\left\{\frac{\pi^2}{2}-2,\frac{\pi^2}{2}-2\right\}$
$maxarvot$ ▸Decimal	$\{2.9348,2.9348\}$
$\int_{-\pi}^{\pi}(h(x))\,dx$	$\frac{\pi\cdot(\pi^2-6)}{3}$
$\frac{\pi\cdot(\pi^2-6)}{3}$ ▸Decimal	4.05224

14.1



14.2

Muodostetaan funktioiden erotus $\mathbf{h}(x) = \mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x)$ ja tämän ensimmäinen ja toinen derivaatta $\mathbf{h1}(x)$ ja $\mathbf{h2}(x)$. Koska $\mathbf{h2}$ on ≥ 0 ja $= 0$ vain erillisissä pisteissä, on $\mathbf{h1}$ aidosti kasvava. Koska $\mathbf{h1}(0) = 0$, on $\mathbf{h1}$ negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$. Tällöin $\mathbf{h}$ on vähenevä, kun $x < 0$, ja kasvava, kun $x > 0$. Koska $\mathbf{h}(0) = 0$, on aina $\mathbf{h}(x) \geq 0$. Siis $\mathbf{f}(x) \geq \mathbf{g}(x)$, ja $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x)$ vain, kun $x = 0$.

Funktioiden erotuksen suurin arvo eli funktion $\mathbf{h}(x)$ suurin arvo saadaan välin päätepisteissä. Arvo on $\frac{\pi^2}{2} - 2 \approx 2.9348$.

Kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan integroimalla: $\frac{\pi \cdot (\pi^2 - 6)}{3} \approx 4.0522$.

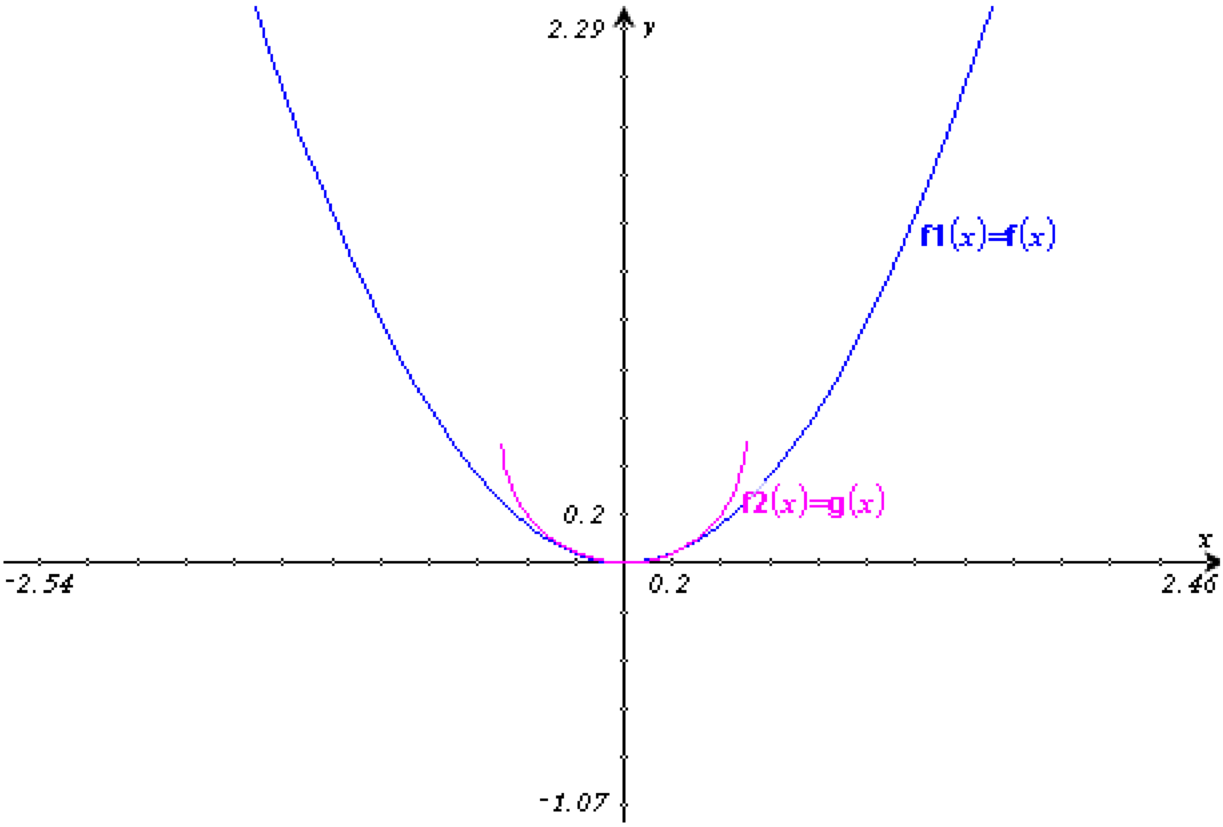
Liitteenä kuvio.

14.3

Tehtävä 15

Define $f(x)=x^2$	*Valmis*
$ympyra:=(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	$x^2-2\cdot a\cdot x+y^2-2\cdot b\cdot y+a^2+b^2=r^2$
$ehdot:=\{ympyra\mid x=t \text{ and } y=f(t), ympyra\mid x=-t \text{ and } y=f(-t), ympyra\mid x=0 \text{ and } y=f(0)\}$	$\{t^4+(1-2\cdot b)\cdot t^2-2\cdot a\cdot t+a^2+b^2=r^2, t^4+(1-2\cdot b)\cdot t^2+2\cdot a\cdot t+a^2+b^2=r^2, a^2+b^2=r^2\}$
$kertoimet:=\text{solve}(ehdot,\{a,b,r\})$	$r=\frac{t^2+1}{2} \text{ and } a=0 \text{ and } b=\frac{t^2+1}{2} \text{ or } r=\frac{-(t^2+1)}{2} \text{ and } a=0 \text{ and } b=\frac{t^2+1}{2}$
$ymp:=ympyra\mid r=\frac{t^2+1}{2} \text{ and } a=0 \text{ and } b=\frac{t^2+1}{2}$	$\frac{t^4}{4}+t^2\cdot\left(\frac{1}{2}-y\right)+x^2+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{(t^2+1)^2}{4}$
$r0:=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^2+1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$ymp0:=ymp\mid t=0$	$x^2+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
$\text{solve}(ymp0,y)$	$y=\frac{\sqrt{1-4\cdot x^2}+1}{2} \text{ or } y=\frac{-(\sqrt{1-4\cdot x^2}-1)}{2}$
Define $g(x)=\frac{-(\sqrt{1-4\cdot x^2}-1)}{2}$	*Valmis*
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\mid x=0$	2
$\frac{d^2}{dx^2}(g(x))\mid x=0$	2

15.1



15.2

Yleiseen ympyrän yhtälöön $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ sijoitetaan pisteiden O, A ja B koordinaatit, jolloin saadaan ehdot, joista kertoimet a, b ja r voidaan ratkaista.

Ympyrän yhtälöksi saadaan tällöin $\frac{t^4}{4}+t^2\cdot\left(\frac{1}{2}-y\right)+x^2+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{\left(t^2+1\right)^2}{4}$ ja

säteeksi $r=\frac{t^2+1}{2}$.

Tämän raja-arvo, kun $t\to 0$ eli paraabelin kaarevuussäde origossa on $\frac{1}{2}$.

Vastaava rajaympyrä on $x^2+y^2-y=0$ ja tämän alapuoli x:n funktiona

$\mathbf{g}(x)=\frac{1-\sqrt{1-4\cdot x^2}}{2}$.

Dervoimalla saadaan $\mathbf{f}''(0)=\mathbf{g}''(0)=2$, mikä on kaarevuussäteen käänteisarvo.

Liitteenä kuvio.

15.3