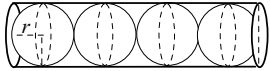




Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Eräät tehtävät sisältävät useita osia [merkittynä **a**), **b**) jne.], jolloin kaikkien kohtien käsittely kuuluu tehtävän täydelliseen suoritukseen.

1. Maantiekartassa on joitakin teiden risteyskohtia merkitty ympyrällä, jonka halkaisija on 1,8 mm. Mitä risteysalueen halkaisijaa tämä vastaa todellisuudessa, kun kartan mitta-kaava on 1:200 000? Jos risteysalueen halkaisija todellisuudessa on 25 m, niin kuinka suuri sen tulisi kyseisellä kartalla olla?
2. Ratkaise yhtälö  $x(x - \frac{7}{10}) = \frac{1}{10} - x$ .
3. Täysinäisessä tiiviisti pakatussa ympyrälieriön muotoisessa säilytyskotelossa on neljä tennispalloa. Kuinka suuri osa pallojen tilavuus on kotelon tilavuudesta? 
4. Metsäntutkimuslaitos mittaa eräissä koepuumetsiköissään puiden paksuuskasvua ns. kasvupannalla, joka tunnin välein rekisteröi puun ympärysmittan rinnan korkeudelta millimetrin sadasosan tarkkuudella. Erään koekuusen tasan vuoden välein otetut mittaukset osoittavat seuraavan: Vuonna 1997 kuusen ympärysmitta oli 102,20 cm. Vuoden 1998 mittaus osoitti ympärysmittan kasvaneen edellisestä vuodesta 13,16 mm, vuoden 1999 mittaus vastaavasti 6,85 mm ja vuoden 2000 mittaus 7,06 mm aina edelliseen vuoteen verrattuna.  
**a)** Kuinka paljon kyseisen kuusen halkaisija oli kaikkiaan kasvanut kolmivuotiskaudella? Vastaus 0,1 mm:n tarkkuudella. **b)** Kuinka monta prosenttia poikkileikkauksen pinta-ala oli kaikkiaan kasvanut? Poikkileikkaus oletetaan ympyrän muotoiseksi. Vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
5. Yrityksen liikevaihto oli vuoden toisella neljänneksellä 11 % pienempi kuin vuoden ensimmäisellä neljänneksellä. Kokonaisuudessaan yrityksen liikevaihto kyseisen puolen vuoden osalta oli 6,0 miljoonaa euroa. Kuinka suuri yrityksen liikevaihto oli vuoden ensimmäisellä neljänneksellä?
6. Pisteiden  $(-2, 11)$  ja  $(7, -1)$  kautta kulkeva suora muodostaa koordinaattiakselien kanssa kolmion. **a)** Muodosta suoran yhtälö. **b)** Määritä syntyneen kolmion sivujen pituudet.
7. Suorakulmaisen kolmion  $ABC$  kateetin  $AC$  pituus on 8,6 cm ja kateetin  $BC$  pituus 5,8 cm. Kateetilla  $AC$  on piste  $D$  siten, että  $DA = DB$ . Määritä janojen  $AB$  ja  $CD$  pituudet.
8. Pieneläinklinikassa käytetään kerta-annoksena annettavaa nukutusainetta, jonka määrä elimistössä vähenee eksponentiaalisesti siten, että kolmen tunnin kuluttua aineesta on enää puolet jäljellä. Leikkauksen ajan on nukutusainetta elimistössä oltava vähintään 23 mg eläimen kutakin painokiloa kohti. Kuinka suuri määrä nukutusainetta on vähintään annettava 20 kg painavalle koiralle leikkausta varten, kun leikkauksen on arvioitu kestävän 1 h 15 min?
9. Kooltaan pieneneviä kuutioita pinotaan päällekkäin. Ensimmäisen kuution särmä on tasan yksi metri, ja muiden kuutioiden särmät ovat pituudeltaan aina puolet alla olevan kuution särmästä. **a)** Määritä kolmen alimman kuution ja  $n$ :nnen kuution särmän pituus. **b)** Kuinka korkea on pino, jossa on 10 ensimmäistä kuutiota? Laske taulukkoon pinon korkeuden arvot, kun kuutioita on 11, 12, 13 ja 14. Jos ajatellaan kuutioiden lukumäärän kasvavan rajatta, niin mitä lukua pinon korkeus näyttää lähestyvän?

KÄÄNNÄ!

10. Sanan YLIOPPILAS kymmenestä kirjaimesta otetaan umpimähkään kolme. Millä todennäköisyydellä **a)** ensiksi otettu kirjain on vokaali, **b)** otetuista kirjaimista vain yksi on vokaali, **c)** otetuista kolmesta kirjaimesta voidaan muodostaa sana ILO?
11. Kehäkulmalla tarkoitetaan kulmaa, jonka kärki on ympyrän kehällä ja kyljet ovat ympyrän jäniteitä. Olkoot  $A$  ja  $B$  ympyrän halkaisijan päätepisteitä sekä  $C$  kolmas ympyrän kehäpiste. Olkoon  $O$  ympyrän keskipiste. Osoita, että kehäkulman  $ABC$  suuruus on puolet keskuskulman  $AOC$  suuruudesta.
12. Tyhjennettävässä vesisäiliössä olevan veden tilavuus litroina on  $V(t) = 520(20 - t)^2$ , jossa  $t$  on aika minuutteina. Säiliö tyhjenee nopeudella  $q(t) = -V'(t)$  (litraa/min). **a)** Säiliön tyhjentäminen alkaa hetkellä  $t = 0$ . Milloin säiliö on tyhjä? Piirrä funktion  $V$  kuvaaja. **b)** Määritä funktio  $q$  ja piirrä sen kuvaaja. Milloin tyhjenemisnopeus on suurimmillaan?
13. Ranskalaisen matemaatikon Adrien Legendren mukaan nimetyt polynomit  $P_n(x)$  määritellään rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \quad \text{kun } n = 2, 3, 4, \dots$$

Määritä arvoja  $n = 2$  ja  $n = 3$  vastaavat polynomit  $P_2(x)$  ja  $P_3(x)$  sekä näiden derivaatat  $P_2'(x)$  ja  $P_3'(x)$ . Osoita, että on voimassa yhtälö  $P_3'(x) - xP_2'(x) = 3P_2(x)$ .

14. Insinööri Virtanen oli tallettanut asunnon myynnistä saamansa 500 000 markan kauppasumman vuoden 1999 alussa tilille, jolle pankki maksoi 2,00 prosentin verotonta vuotuista korkoa. Talletuskorkojen verotus muuttui 1.6.2000 siten, että tästä päivästä alkaen kertyvät korot ovat kaikki veronalaisia. Koroista menee 29 prosentin lähdevero, jonka pankki perii talletuksen noston yhteydessä täysiksi markoiksi pyöristettynä. Verotuskäytännön muuttuessa pankki lisäsi Virtasen tilille vuoden alusta siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon rahaa Virtanen sai nostaessaan tilillä olevat varat 25.8.2000? Pankki laski talletukselle koron todellisten päivien mukaan tallettamispäivästä nostopäivään nostopäivää lukuun ottamatta. Karkausvuoteen 2000 pankki laski kuuluvaksi 366 korokopäivää.
15. Taulukossa on Sydneyn olympialaisten kymmenottelun kymmenen parhaan urheilijan pistetulos 100 metrin juoksussa ja kuulantyytäessä sekä ottelun lopulliset kokonaispistemäärät. Tutki, miten 100 metrin juoksun ja kuulantyytäessä yhteistuloksen perusteella voidaan ennustaa lopullista menestymistä kymmenottelussa. Laske tätä tarkoitusta varten 100 metrin juoksun sekä kuulantyytäessä pistesumman ja ottelun kokonaispistemäärän korrelaatiokerroin sekä piirrä jakaumasta korrelaatiodiagrammi. Sovita kuvioon regressiosuora.

	100 m juoksu	Kuulantyytä	Kokonaispistemäärä
1. Erki Nool EST	933	796	8641
2. Roman Sebrle CZE	878	803	8606
3. Chris Huffins USA	980	806	8595
4. Dean Macey GBR	903	766	8567
5. Tom Pappas USA	901	782	8425
6. Tomas Dvorak CZE	881	846	8385
7. Frank Busemann GER	881	760	8351
8. Attila Zsivoczky HUN	838	787	8277
9. Stefan Schmid GER	874	731	8206
10. Henrik Dagård SWE	897	788	8178

Eduard Hämäläisen tulos 100 metrin juoksussa oli 858 pistettä ja kuulantyytäessä 732 pistettä. Jos edellä saatua regressioanalyysin tulosta käytetään ennusteena, niin mikä olisi ollut Hämäläisen odotettavissa oleva lopullinen kokonaispistemäärä?