YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

16.3.2001

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Eräät tehtävät sisältävät useita osia [merkittynä **a)**, **b)** jne.], jolloin kaikkien kohtien käsittely kuuluu tehtävän täydelliseen suoritukseen.

1. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x+3} = 0.$$

2. Määritä käyrän $y = x^3$ pisteeseen $(2, 8)$ piirretyn tangentin yhtälö. Missä pisteessä tangentti leikkaa y-akselin? Määritä tangentin, y-akselin ja suoran $y = 8$ määräämän kolmion pinta-ala.

3. Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Olkoon $\bar{a} = \frac{3}{2}\bar{i} - 2\bar{j}$ ja olkoon vektorin $\bar{b}$ pituus 5. Määritä $\bar{b}$. Mikä on loppupiste, kun $\bar{b}$ asetetaan alkamaan pisteestä $(4, 3)$?

4. Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5 % säiliössä olevasta ilmasta. Kunka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa?

5. Suoran ympyräkartion muotoisen jäätelötuutin korkeus on $h = 16$ cm ja yläosan (kartion pohjan) halkaisija $d = 6$ cm. Tuutin ympärille kartion vaipaksi kierretään ympyränsektorin muotoinen suojapaperi. Laske sektorin säde r ja keskuskulma α, kun suojapaperi on kaikkialla yksinkertainen (myöskään liimausvaraa ei oteta huomioon). Vastaukset yhden millimetrin ja yhden asteen tarkkuudella.

6. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{5}{4 + 3\cos 2x}$$

suurin ja pienin arvo reaalilukujen joukossa. Millä argumentin arvoilla nämä saadaan?

7. Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g?

8. Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = x^2$; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste.

9. Funktio f on määritelty välillä $0 \le x \le 2$ seuraavasti:

$$f(x) = \int_0^1 |x - t|\, dt.$$

Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2]$. Piirrä kuvaaja.

KÄÄNNÄ!

10. Funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sanotaan *parittomaksi*, jos $f(-x) = -f(x)$ jokaisella reaaliluvulla x. Anna esimerkki parittomasta funktiosta, joka on kasvava $\mathbb{R}$:ssä, ja parittomasta funktiosta, joka ei ole kasvava $\mathbb{R}$:ssä. Osoita, että $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, jos f on pariton ja jatkuva.

11. Pallon sisään asetetaan kuutio, jonka kärjet ovat pallon pinnalla. Kuution sisään asetetaan pallo, joka sivuaa jokaista kuution sivutahkoa. Tämän sisään asetetaan jälleen kuutio jne. Osoita, että pallojen **a)** säteet, **b)** pinta-alat ja **c)** tilavuudet kukin erikseen muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonojen suhdeluvut.

12. Lukujärjestelmän kantaluku on 7. Lausu tämän järjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 kymmenjärjestelmässä. Miten kymmenjärjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 esitetään tässä järjestelmässä?

13. Lukujonon termit ovat $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $x_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ jne. Muodosta termeille rekursiokaava. Laske $\lim_{n\to\infty} x_n$.

14. Miten määritellään kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku $\overline{z}$? Osoita määritelmän perusteella, että kahden kompleksiluvun z_1 ja z_2 tulolle pätee $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$. Ratkaise yhtälö $z^2 + \overline{z} + 1 = 0$.

15. Lohenviljelyaltaaseen, jossa oli 1 100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähetä yhtälön

$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$

mukaisesti. Tässä $P(t)$ on kalamäärä hetkellä t, ja aika t on mitattu viikkoina. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet?