Pitkä matematiikka 16.3.2001, ratkaisut:

1. Yhtälö on määritelty kun $x \neq 0, x \neq -3$. Kertomalla puolittain termillä $x(x+3)$ saadaan yhtälö muotoon $x^2 - x - 3 = 0$. Sen ratkaisu on $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$.

2. Käyrän $y = x^3$ pisteeseen (2,8) piirretyn tangentin yhtälö on $y - 8 = y'(2)(x-2)$ eli, koska $y'(x) = 3x^2$, $y = 12x - 16$. Asettamalla $x = 0$ näemme, että tangentti leikkaa y-akselin pisteessä (0,–16). Tangentti, y-akseli ja suora $y = 8$ rajoittavat suorakulmaisen kolmion, jonka kärjet ovat pisteissä (0, –16), (0, 8) ja (2, 8). Koska kateettien pituudet ovat 16+8 = 24 ja 2, on kolmion ala 24.

3. Vastakkaissuuntaisena $\bar{a}$:lle on $\bar{b}$ muotoa $t\bar{a}$, missä $t < 0$. Koska $|\bar{b}| = 5$, saadaan t:lle yhtälö $5^2 = t^2a^2 = t^2(\frac{9}{4}+4) = \frac{25}{4}t^2$ eli $t^2 = 4$. Tämän negatiivinen ratkaisu on $t = -2$, joten $\bar{b} = -2(\frac{3}{2}\bar{i} - 2\bar{j}) = -3\bar{i} + 4\bar{j}$. Jos $\bar{b}$ asetetaan alkamaan pisteestä (4, 3), saadaan $\bar{b}$:n loppupiste paikkavektorista $4\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{b} = \bar{i} + 7\bar{j}$. Loppupiste on (1, 7).

4. Säiliössä on ilmaa yhden vedon jälkeen $0{,}95 \cdot 2{,}3$ kg, kahden vedon jälkeen $0{,}95^2 \cdot 2{,}3$ kg ja n:n vedon jälkeen $0{,}95^n \cdot 2{,}3$ kg. Tästä saadaan n:lle epäyhtälö $0{,}95^n \cdot 2{,}3 < 0{,}2$ eli $0{,}95^n < \dfrac{0{,}2}{2{,}3}$ eli $n \ln 0{,}95 < \ln \dfrac{2}{23}$ eli $n > \dfrac{\ln \frac{2}{23}}{\ln 0{,}95} \approx 47{,}62$. Vastaus: 48 vedon jälkeen.

5. Kartion akseli h, pohjan säde $\frac{1}{2}d$ ja sivujana r muodostavat suorakulmaisen kolmion, josta saadaan $r = \sqrt{16^2 + 3^2} = \sqrt{265} \approx 16{,}2788$ (cm). Kartion pohjaympyrän piiri on $\pi d = 6\pi$. Näin ollen vaippasektorin keskuskulmalle α pätee $\dfrac{\alpha}{360} = \dfrac{6\pi}{2\pi\sqrt{265}}$, josta $\alpha = 360 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{265}} \approx 66{,}344$. Vastaus: Sektorin säde on 16,3 cm ja keskuskulma 66^o.

6. Koska funktio on murtolauseke, jonka osoittaja on vakio, saavuttaa f suurimman (vast. pienimmän) arvonsa, kun nimittäjä saavuttaa pienimmän (vast. suurimman) arvonsa. Tämä taas tapahtuu, kun $\cos 2x$ saavuttaa pienimmän (suurimman) arvonsa. Tunnetusti $\cos 2x$:n pienin arvo on –1 ja suurin arvo +1. Edellinen saavutetaan, kun $2x = \pi + 2n\pi$, $n \in Z$ ja jälkimmäinen, kun $2x = 2n\pi$, $n \in Z$. Näin ollen funktion f suurin arvo on $\frac{5}{4-3}$ eli 5 ja se saavutetaan, kun $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, $n \in Z$. Funktion f pienin arvo on $\frac{5}{4+3}$ eli $\frac{5}{7}$ ja se saavutetaan, kun $x = n\pi, n \in Z$.

7. Massa on normaalisti jakautunut, $\underline{x} \sim N(204, 6)$. Tällöin $\underline{z} = \frac{1}{6}(x - 204) \sim N(1, 0)$. Todennäköisyys, että pakkauksen massa on alle 200 g, on $P(\underline{x} < 200) = P(\underline{z} < -\frac{2}{3}) = \Phi(-\frac{2}{3}) = 1 - \Phi(\frac{2}{3}) \approx 1 - 0{,}7475 = 0{,}2525$. Todennäköisyys, että keksipakkauksen massa on välillä 200 g – 210 g, on $P(200 \leq \underline{x} \leq 210) = P(x \leq 210) - P(x < 200) = P(\underline{z} \leq 1) - P(\underline{z} < -\frac{2}{3}) = \Phi(1) + \Phi(\frac{2}{3}) - 1 \approx 0{,}8413 + 0{,}7475 - 1 = 0{,}5888$. Vastaus: Pakkauksista 25 % on alle 200 g ja 59 % on välillä 200 g – 210 g.

8. Jos toinen kateetti on suoralla $y = ax$, on toinen kateetti suoralla $y = -a^{-1}x$. Edellinen suora leikkaa paraabelia pisteessä (a, a^2) ja jälkimmäinen pisteessä $(-a^{-1}, a^{-2})$. Hypotenuusa on näiden kahden pisteen kautta kulkevalla suoralla, jonka yhtälö on $y - a^2 = \dfrac{a^2 - a^{-2}}{a + a^{-1}}(x - a)$ eli $y = (a - a^{-1})x + 1$. Suora, ja sen mukana hypotenuusa, leikkaa y-akselia pisteessä $(0, 1)$ kaikilla arvoilla a. Näin ollen jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa y-akselia samassa pisteessä, joka on (0,1).

9. Välillä $[0,1]$ on $f(x) = \int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt = -\Big/_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 + \Big/_x^1 \frac{1}{2}(t-x)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (1-x)^2) = x^2 - x + \frac{1}{2} = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$. Vastaavasti välillä $[1,2]$ on $f(x) = \int_0^1 (x - t)dt = \Big/_0^1 \frac{1}{2}(x-t)^2 = x - \frac{1}{2}$. Funktion kuvaaja koostuu välillä [0,1] ylöspäin aukeavasta paraabelinkaaresta, jonka huippu on pisteessä $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, ja jolle $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ sekä välillä [1,2] janasta pisteestä $(1, \frac{1}{2})$ pisteeseen $(2, \frac{3}{2})$. Tämän perusteella funktion pienin arvo välillä [0,2] on $\frac{1}{4}$ ja suurin arvo $\frac{3}{2}$.

10. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ on pariton, sillä $f(-x) = -x = -f(x)$. Funktio on kasvava $\mathbb{R}$:ssä, sillä jos $x < y$, niin $f(x) = x < y = f(y)$. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ on myös pariton, sillä $f(-x) = x = -f(x)$. Tämä funktio ei ole kasvava $\mathbb{R}$:ssä, sillä jos $x < y$, niin $f(x) = -x > -y = f(y)$. Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pariton, niin $-f(0) = f(-0) = f(0)$, josta seuraa, että $f(0) = 0$. Jos f on lisäksi jatkuva, niin $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

11. Olkoon pallon säde r_1. Pallon sisällä olevan kuution lävistäjä on $2r_1$. Jos kuution särmä on a_1, on $a_1^2 + 2a_1^2 = (2r_1)^2$, josta saadaan $a_1 = 2r_1/\sqrt{3}$. Jos nyt kuution sisään asetetaan taas pallo, on sen säde $r_2 = \frac{1}{2}a_1 = r_1/\sqrt{3}$. **a)** Kahden peräkkäisen pallon säteiden suhde on $r_2/r_1 = 1/\sqrt{3}$. Tämä ei riipu pallojen säteistä, joten säteet muodostavat geometrisen jonon suhdeluvulla $1/\sqrt{3}$. **b)** Perättäisten pallojen pinta-alojen suhde on niiden säteiden suhteen neliö eli 1/3. Koska tämä ei riipu palloista, muodostavat pinta-alat geometrisen jonon suhdeluvulla 1/3. **c)** Perättäisten pallojen tilavuuksien suhde on säteiden suhteen kuutio eli $1/(3\sqrt{3})$. Koska tämä ei riipu palloista, muodostavat tilavuudet geometrisen jonon suhdeluvulla $1/(3\sqrt{3})$.

12. Kymmenjärjestelmässä 7-järjestelmän luku 11_7 on $1 \cdot 7 + 1 = 8$. Vastaavasti 111_7 on kymmenjärjestelmässä $7^2 + 7 + 1 = 57$ ja 1111_7 on $7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 400$. Koska kymmenjärjestelmän luku $11_{10} = 1 \cdot 7 + 4$, on sen esitys 7-järjestelmässä 14_7. Vastaavasti $111_{10} = 2 \cdot 7^2 + 7 + 6$ ja $1111_{10} = 3 \cdot 7^3 + 7^2 + 4 \cdot 7 + 5$, joten niiden esitykset 7-järjestelmässä ovat 216_7 ja 3145_7.

13. Tehtävän mukaan $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2x_1}$, $x_3 = \sqrt{2x_2}$ ja $x_4 = \sqrt{2x_3}$. Rekursiokaava on siten $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Toisaalta $x_n = 2^{s(n)}$, missä $s(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}, n = 2, 3, \ldots$. Perustelu: Koska $x_2 = 2^{\frac{1}{2}}$, väite pätee arvolla $n = 2$. Jos väite pätee arvolla $n = j$, niin $x_{j+1} = \sqrt{2x_j} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}s(j)} = 2^{\frac{1}{2}(1+s(j))}$, missä $\frac{1}{2}(1 + s(j)) = \sum_{k=1}^{j} 2^{-k} = s(j+1)$. Siis $x_{j+1} = 2^{s(j+1)}$. On osoitettu, että $x_n = 2^{s(n)}$. Edelleen $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ (geometrisen sarjan summa), joten $\lim_{n\to\infty} x_n = 2^1 = 2$.

14. Kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku on $\overline{z} = x - iy$. Kompleksilukujen $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ tulo on $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. Tämän perusteella $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1z_2}$. Lopuksi, jos $z = x + iy$, on $z^2 + \overline{z} + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy - y)$. Tämä on nolla vain jos sekä reaaliosa $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ että imaginaariosa $y(2x - 1) = 0$. Jälkimmäinen toteutuu, jos $y = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$. Jos $y = 0$, on reaaliosa $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Tämä on aina positiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisuja arvolla $y = 0$. Jos $x = \frac{1}{2}$, on reaaliosa $y^2 - \frac{7}{4}$. Tämä on nolla, kun $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$. Siis yhtälön ratkaisut ovat $z = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})$.

15. Integroimalla separoidusta muodosta $\dfrac{dP}{\sqrt{P}} = -4dt$ saadaan yleinen ratkaisu $2\sqrt{P} = -4t + 2C$ eli $P(t) = (C - 2t)^2$. Alussa oli 1100 kalaa, joten $P(0) = 1100$. Toisaalta $P(0) = C^2$, joten $C = 10\sqrt{11}$. Kalat ovat kuolleet, kun $0 = P(t) = (10\sqrt{11} - 2t)^2$. Tästä saadaan $t = 5\sqrt{11} \approx 16{,}583$. Vastaus: Kalat ovat kuolleet 17 viikon kuluttua.