

Pitkä matematiikka 22.3.2002, ratkaisut:

- 1. a)** Suoran yhtälö on $y = 2$. **b)** Yhtälö on $x = 1$. **c)** Suoran kulmakerroin on -1 , joten suoran yhtälö on $y - 2 = -1(x - 1)$ eli $y = 3 - x$. **d)** Suoran $2x + y = 0$ eli $y = -2x$ kulmakerroin on -2 . Sitä vastaan kohtisuoran suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Koska tämä suora kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta, on sen yhtälö $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ eli $x - 2y + 3 = 0$.
- 2. a)** Koska $e^0 = 1$, on $e^x = 1$ arvolla $x = 0$. **b)** Edellisen mukaan $e^{x^3+4x^2+x} = 1$, kun $x^3 + 4x^2 + x = 0$ eli $x(x^2 + 4x + 1) = 0$. Näin on, jos $x = 0$ tai $x^2 + 4x + 1 = 0$. Jälkimmäisen ratkaisu on $x = -2 \pm \sqrt{4 - 1}$. Vastaus: x on 0 tai $-2 - \sqrt{3}$ tai $-2 + \sqrt{3}$.
- 3.** Jos vuonna 2000 koko myynti oli $100a$ ja siitä meni ulkomaille x %, oli ulkomaan myynti xa ja kotimaan myynti $(100 - x)a$. Vuonna 2001 oli ulkomaan myynti $1,1xa$ ja kotimaan myynti $0,95(100 - x)a$. Koska koko myynti vuonna 2001 oli $106a$, on oltava $1,1xa + 0,95(100 - x)a = 106a$ eli $0,15x = 11$ eli $x = 73,33$. Vastaus: 73 %.
- 4.** Olkoon pienemmän mitan halkaisija x dm. Mitat ovat yhdenmuotoiset ja tilavuuksien suhde on 2 . Näin ollen on suuremman mitan halkaisija $\sqrt[3]{2} \cdot x$ ja tilavuus vastaavasti $V = \pi(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot x)^2 1,5 = 1$ (litra). Tästä saadaan ratkaistua $x^2 = 4/(\sqrt[3]{4} \cdot 1,5\pi)$ eli $x = 2/(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{1,5\pi}) \approx 0,731$. Vastaus: $7,3$ cm.
- 5.** Koska $P(x)$ on jaollinen binomilla $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, on $P(x)$:llä nollakohdat $+1$ ja -1 . Koska x^3 :n kerroin on yksi, on $P(x)$ muotoa $P(x) = (x - x_1)(x - 1)(x + 1)$. Edelleen, $12 = P(2) = (2 - x_1)(2 - 1)(2 + 1) = 3(2 - x_1)$, josta saadaan, että $2 - x_1 = 4$ eli $x_1 = -2$. Polynomi on siis $P(x) = (x + 2)(x^2 - 1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
- 6. a)** Jos \bar{y} alkaa \bar{x} :n loppupisteestä, muodostavat \bar{x} , \bar{y} ja $\overline{\bar{x} + \bar{y}}$ tasasivuisen kolmion. Sen jokainen kulma on 60° . Vektorien \bar{x} ja \bar{y} välinen kulma on 60° kulman vieruskulmana 120° . **b)** Jos \bar{x} ja \bar{y} alkavat samasta pisteestä, muodostavat \bar{x} , \bar{y} ja $\overline{\bar{x} - \bar{y}}$ tasasivuisen kolmion. Vektorien \bar{x} ja \bar{y} välinen kulma on siten 60° .
- 7.** Olkoon suorakulmion sivut x m ja y m. Tällöin $x + y \leq 12$ ja $xy = 30$ eli $y = 30/x$. Sijoittamalla tämä epäyhtälöön saadaan $x + 30/x \leq 12$ eli $x^2 - 12x + 30 \leq 0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat $x = 6 \pm \sqrt{36 - 30} = 6 \pm \sqrt{6}$. Siten epäyhtälön ratkaisu on $6 - \sqrt{6} \leq x \leq 6 + \sqrt{6}$. Koska $6 - \sqrt{6} \approx 3,55 > 0$ ja $6 + \sqrt{6} \approx 8,45 < 12$, antaa epäyhtälön ratkaisu x :n vaihtelurajat. Koska $y = 30/x$, pätee y :lle $30/(6 + \sqrt{6}) \leq y \leq 30/(6 - \sqrt{6})$ eli $6 - \sqrt{6} \leq y \leq 6 + \sqrt{6}$. Vastaus: Arvoja väliltä $[6 - \sqrt{6}, 6 + \sqrt{6}]$.
- 8.** $\int_1^n (x^{-2} + \cos nx) dx = \int_1^n -1/x + (\sin nx)/n = 1 + (\sin n^2 - \sin n - 1)/n$. Edelleen, $0 \leq |\sin n^2 - \sin n - 1|/n \leq 3/n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, joten myös $(\sin n^2 - \sin n - 1)/n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Näin ollen $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n (x^{-2} + \cos nx) dx = 1$.
- 9.** Arvotut reaali-luvut määrittävät pisteen (a, b) xy -tason neliöstä $[0, 3] \times [0, 3]$. Ehto $\log_{10}(2a + 3b) > 1 \Leftrightarrow 2a + 3b > 10$. Ehdon täyttävien lukujen määrittämät pisteet ovat siinä neliön $[0, 3] \times [0, 3]$ osassa, joka on suoran $2x + 3y = 10$ yläpuolella. Ko. suora leikkaa neliötä pisteissä $(3, 4/3)$ ja $(1/2, 3)$. Suotuisa osa on siis suorakulmainen kolmio, jonka ala on $(3 - 4/3)(3 - 1/2)/2 = 25/12$. Koska koko neliön ala on 9 , on kysytty todennäköisyys $25/(12 \cdot 9) = 25/108 \approx 0,2315$. Vastaus: $25/108$.

10. Olkoon A pyramidin huippu, B pohjaneliön sivun keskipiste ja D pohjaneliön keskipiste. Sisäpallon keskipiste E on janalla AD ja pallo koskettaa janaa AB pisteessä F . Olkoon pallon säde r , $AE = x$, $BD = BF = y$ ja $AF = z$. Kolmioista AFE ja ADB saadaan, että $z = \sqrt{x^2 - r^2}$ ja $(y + z)^2 = y^2 + (x + r)^2$. Sijoittamalla z :n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön saadaan $y = \frac{r(x + r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$. Pyramidin tilavuus $V = V(x) = \frac{1}{3}(2y)^2(x + r) = \frac{4}{3}r^2 \frac{(x + r)^2}{x - r}$. Derivaatta on sievennettyinä $V'(x) = \frac{4}{3}r^2 \frac{x^2 - 2rx - 3r^2}{(x - r)^2}$, joten $V'(x) = 0$, kun $x^2 - 2rx - 3r^2 = 0$ eli kun $x = -r$ tai $x = 3r$. Koska $x \geq 0$, vain $x = 3r$ kelpaa. $V'(x)$ on saman merkkinen kuin $x^2 - 2rx - 3r^2$. Siksi $V'(x) < 0$, kun $0 < x < 3r$ ja $V'(x) > 0$, kun $x > 3r$ eli $V(x)$ saa pienimmän arvonsa, kun $x = 3r$. Pienin arvo on $V(3r) = \frac{4}{3} \cdot 8r^3$. Sisällä olevan pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$. Sen suhde pyramidin tilavuuteen on $\pi/8$.
11. Olkoon $P = (1, 1, 1)$. Valitaan suoralta pisteet, $Q = (1, 2, 3)$ ($t=0$) ja $O = (0, 0, 0)$ ($t = -1$). Tällöin vektorit $\overline{OP} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{PQ} = \bar{j} + 2\bar{k}$ ovat tasossa. Vektori $\bar{n} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ on tason normaali, jos $\bar{n} \cdot \overline{PQ} = 0 = \bar{n} \cdot \overline{OP}$. Edellisestä saadaan $y + 2z = 0$ eli $y = -2z$. Sijoittamalla tämä jälkimmäiseen ehtoon $x + y + z = 0$ saadaan $x - z = 0$ eli $x = z$. Kaikki muotoa $\bar{n} = z(\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olevat vektorit ovat normaalivektoreita. Riittää antaa yksi niistä. Vastaus: $\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$.
12. Kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on injektio, sillä jos $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$. Kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ ei ole injektio, sillä vaikka $x \neq y$, niin $f(x) = 1 = f(y)$. Kuvaus $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ on määritelty kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$, joten se on $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2 \geq 0$. Lisäksi $f'(x) > 0$, kun $x \neq 2$. Näin ollen f on aidosti kasvava \mathbb{R} :ssä eli $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Tästä seuraa, että jos $x \neq y$, on myös $f(x) \neq f(y)$, eli että f on injektio. Kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ on aidosti kasvava, koska kaikilla arvoilla x on $f'(x) = e^x > 0$. Tästä seuraa kuten edellä, että f on injektio. Koska kaikilla arvoilla x on $f(x) > 0$, ei f voi olla surjektio. Jos esimerkiksi $y = -1$, ei ole sellaista reaalilukua x , että $e^x = -1$, eli että $f(x) = y$.
13. Funktion lauseke on muotoa $1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(x)^n$, missä $q(x) = -\frac{9}{5} \sin x \cos x = -\frac{9}{10} \sin 2x$. Sarja on geometrinen ja suhdeluku on $q(x)$. Sarja suppenee, kun $|q(x)| < 1$. Koska aina $|\sin 2x| \leq 1$, on kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $|q(x)| = \frac{9}{10} |\sin 2x| < 1$. Siten f on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(x)^n = 1/(1 - q(x)) = 1/(1 + \frac{9}{10} \sin 2x)$. Funktio saa suurimman arvonsa, kun $\sin 2x$ on pienin ja pienimmän arvonsa, kun $\sin 2x$ on suurin. Edellinen tapahtuu, kun $\sin 2x = -1$ eli kun $x = x_0 = -\pi/4 + n\pi$. Suurin arvo on $f(x_0) = 1/(1 - 9/10) = 10$. Jälkimmäinen tapahtuu, kun $\sin 2x = 1$ eli kun $x = x_1 = \pi/4 + n\pi$. Pienin arvo on $f(x_1) = 1/(1 + 9/10) = 10/19$.
14. Koska $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$, saadaan derivoimalla yhtälö puolittain ensimmäisen kertaluvun lineaari differentiaaliyhtälö $f(x) = f'(x)$ eli $f' - f = 0$. Tämän yleinen ratkaisu on $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla ratkaisu alkuyhtälön vasempaan puoleen saadaan $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x ce^t dt = c \int_0^x e^t dt = c(e^x - 1)$. Ratkaisu ce^x toteuttaa siis ensin mainitun yhtälön jos ja vain jos $ce^x - c = ce^x + 2 \Leftrightarrow c = -2$. Jokainen differentiaaliyhtälön ratkaisu ei siten toteuta ensin mainittua yhtälöä.
15. Funktion $f(x)$ astetta n oleva Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$ on $T_n(x) = f(0) +$

$f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$. Jos $f(x) = e^{x/2}$, niin $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$, $f''(x) = (\frac{1}{2})^2e^{x/2}$, ..., $f^{(n)}(x) = (\frac{1}{2})^ne^{x/2}$. Kysytyiksi Taylorin polynomeiksi saadaan siis $T_0(x) = 1, T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x, T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2, T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3$. Jos $f(1)$ korvataan $T_n(1)$:llä, on virhe $R_{n+1}(1) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)$, missä $0 \leq t \leq 1$. Jos $f(x) = e^{x/2}$, niin $R_{n+1}(1) = \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}e^{t/2} \leq \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}e^{1/2} < 10^{-16}$, kun $(n+1)!2^{n+1} > 10^{16} \cdot e^{1/2} \approx 1,6487 \cdot 10^{16}$. Vasen puoli kasvaa n :n kasvaessa. Koska $(14)! \cdot 2^{14} \leq 1,5 \cdot 10^{15}$ ja $(15)! \cdot 2^{15} \geq 4,2 \cdot 10^{16}$, kelpaa kysytyksi asteluvuksi 14 tai sitä suurempi luku.