

Lyhyt matematiikka 26.3.2003, ratkaisut:

- a) $x = \frac{1}{30}(-2 \pm \sqrt{4 + 60}) = \frac{1}{30}(-2 \pm 8)$. Vastaus: x on $-\frac{1}{3}$ tai $\frac{1}{5}$.

b) Jos $\frac{4x}{x-1} = 13$, on $4x = 13x - 13$, josta $x = \frac{13}{9}$. Vastaus: Arvolla $\frac{13}{9}$.
- Jos kokonaiskulutus on $100a$, on palveluiden ja julkisen sektorin osuus $18a = 14\,717$. Siis $a = 14\,717/18$. Teollisuuden ja rakentamisen osuus on $53a$ ja metalliteollisuuden $\frac{16}{100} \cdot 53a = \frac{16 \cdot 53 \cdot 14\,717}{1800} \approx 6933,34$ GWh. Vastaus: 6933 GWh.
- a) Jos kolmion kulmat ovat $5a, 11a$ ja $20a$, on $5a + 11a + 20a = 180$, josta $a = 5$. Kolmion kulmat ovat $25^\circ, 55^\circ$ ja 100° . b) Jos kolmion kateetit ovat $3a$ ja $4a$, on kolmion ala $\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a$. Tästä saadaan yhtälö $\frac{1}{2} \cdot 12a^2 = \frac{1}{2} \cdot 27$, josta $a^2 = \frac{9}{4}$ ja $a = \frac{3}{2}$. Kolmion sivut ovat $\frac{9}{2}, 6$ ja $\frac{15}{2}$.
- Olkoon peruskorvattavan lääkkeen hinta x ja erityiskorvattavan y . Tällöin ne toteuttavat yhtälön $51,01 - 0,50(x - 8,41) - 0,75(y - 4,20) = 23,16$ eli sievennettynä $0,50x + 0,75y = 35,205$. Koska $x + y = 51,01$, saadaan tästä $x = 12,21$ ja $y = 38,80$. Vastaus: Peruskorvattava 12,21 euroa ja erityiskorvattava 38,80 euroa.
- Säiliön pohjan säde $r = 1000$ m ja korkeus $h = 320$ m. Säiliön tilavuus $V = \pi r^2 h = 320\pi \cdot 10^6$ m³. Säiliöstä haihtuu vettä sekunnissa $0,1/60$ m³ ja planeetan vuodessa $0,3 \cdot 10^7/60$ m³. Täyden säiliön tyhjentymisaika on planeetan vuosissa $\frac{60 \cdot 320\pi \cdot 10^6}{0,3 \cdot 10^7} = 20 \cdot 320\pi \approx 20\,106,19$. Vastaus: 20 100 vuotta.
- Oikean kirjaimen näppäilyn todennäköisyys on $\frac{1}{3}$ ja kahdeksan oikean $(\frac{1}{3})^8 = \frac{1}{6561} \approx 0,0001524$. Väärän näppäilyn todennäköisyys on $\frac{2}{3}$ ja se voi olla kahdeksassa paikassa. Todennäköisyys sille, että on tasan yksi virhe, on $8 \cdot \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3})^7 = \frac{16}{6561} \approx 0,002439$. Vastaus: Todennäköisyydellä 0,00015 täysin oikein ja todennäköisyydellä 0,0024 tasan yksi virhe.
- Pohjaneliön lävistäjän pituus on $\sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2} = 40$. Pohjaneliön lävistäjän puolikas ja pyramidin korkeus ovat kateetteja suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusa on sivusärmä. Näin ollen sivusärmän pituus on $\sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = 29$. Sivusärmän ja pohjan välisen kulman α tangenti $\tan \alpha = 21/20 = 1,05$, joten $\alpha \approx 46,3972^\circ$. Vastaus: Sivusärmän pituus 29, särmän ja pohjan välinen kulma $46,40^\circ$.
- Funktion derivaatta $f'(x) = -x^2 - 2x + 3 = 4 - (x^2 + 2x + 1) = 4 - (x+1)^2 \leq 4$. $f'(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, jonka suurin arvo on 4. Näin ollen $f'(x)$ saa kaikki reaaliarvot $y \leq 4$.
- Kysytyt pisteet ovat toisaalta suorien $l_1 : y = 0$ ja $l_2 : 2y - x = 6$ välissä sekä toisaalta suorien $l_3 : x = -y$ ja $l_4 : 3x + y = 3$ välissä. Pisteet muodostavat nelikulmion, jonka kärjet ovat suorien l_1 ja l_4 leikkauspiste $(1, 0)$, suorien l_1 ja l_3 leikkauspiste $(0, 0)$, suorien l_2 ja l_3 leikkauspiste $(-2, 2)$ sekä suorien l_2 ja l_4 leikkauspiste $(0, 3)$. y -akseli jakaa nelikulmion kahteen kolmioon. Vasemmanpuoleisen ala on $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ ja oikeanpuoleisen $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Nelikulmion ala on $A_1 + A_2 = 4\frac{1}{2}$.

- 10.** a) Aritmeettisessa jonossa a_1, a_2, a_3, \dots on $a_1 = a$, $a_2 = a + d$ ja yleisesti $a_n = a + (n - 1)d$. Nyt $a_1 = 4$, joten $a = 4$ ja $a_5 = 4 + 4d = 1$, joten $d = -\frac{3}{4}$. Siis $a_2 = a + d = 3\frac{1}{4}$, $a_3 = a + 2d = 2\frac{1}{2}$, $a_4 = a + 3d = 1\frac{3}{4}$ ja $a_{10} = a + 9d = -2\frac{3}{4}$.
 b) Geometrisessä jonossa a_1, a_2, a_3, \dots on $a_1 = a$, $a_2 = aq$ ja yleisesti $a_n = aq^{n-1}$. Nyt $a_1 = 4$, joten $a = 4$ ja $a_5 = aq^4 = 4q^4 = 1$, joten $q^4 = 1/4$ ja $q = \pm 1/\sqrt{2}$. Siis $a_2 = aq = \pm 2\sqrt{2}$, $a_3 = aq^2 = 2$, $a_4 = aq^3 = \pm\sqrt{2}$ ja $a_{10} = aq^9 = \pm 1/(4\sqrt{2})$.
- 11.** Jos $P(x) = x^5 + x + 1$, on $P'(x) = 5x^4 + 1$. Iteraatiokaava saa tällöin muodon $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n + 1}{5x_n^4 + 1}$. Jos $x_0 = 0$, saadaan kaavasta $x_1 = -1$, $x_2 = -0,83333333$, $x_3 = -0,76438212$, $x_4 = -0,75502487$, $x_5 = -0,75487770$, $x_6 = -0,75487767$. Koska $x_6 = x_5$ kuuden desimaalin tarkkuudella, voisi x_6 antaa nollakohdan likiarvon kuuden desimaalin tarkkuudella.
- 12.** Summa a kasvaa toisaalta 1.1.2002 alkaen korkotekijän $q_1 = 1,0254$ mukaan ja toisaalta 1.1.2003 alkaen korkotekijän mukaan $q_2 = 1,0325$ mukaan. Kun jälkimmäisestä hetkestä on kulunut x vuotta, ovat summat kasvaneet yhtäsuuriksi. Koronkoronlaskun mukaan suureiden välinen yhtälö on $q_1^{x+1}a = q_2^x a$ eli $q_1^{x+1} = q_2^x$. Tästä saadaan $(x + 1) \ln q_1 = x \ln q_2$ eli $x = \frac{\ln q_1}{\ln q_2 - \ln q_1} \approx 3,6350$. Koska 3,6350 vuotta on 3 vuotta 7,6 kuukautta, ovat talletukset yhtäsuuret elokuussa 2006.
- 13.** Suunnikkaan $ABCD$ sisälle piirretään kolmio AEF , missä E on sivun BC ja F sivun CD keskipiste. Olkoon sivu $AB = a$ ja suunnikkaan korkeus h . Tällöin kolmion ABE korkeus on $\frac{1}{2}h$ ja ala $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}ah$. Vastaavasti kolmion CFE ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}ah$ ja kolmion AFD ala $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{4}ah$. Koska suunnikkaan ala on ah , on kolmion AEF ala $ah - \frac{1}{4}ah - \frac{1}{8}ah - \frac{1}{4}ah = ah - \frac{5}{8}ah = \frac{3}{8}ah$ eli $3/8$ suunnikkaan alasta.
- 14.** Jos osakkeiden arvo oli alussa $100a$, oli arvo viidenneksen menetyksen jälkeen $80a$. Nousun jälkeen arvo oli $1,07 \cdot 80a = 85,6a$. a) Osakkeiden arvo oli pudonnut prosenteissa $(100a - 85,6a)/a = 14,4$. b) Arvon menetys oli $14,4a = 900$, joten $a = 62,5$. Ostohinta oli siis 6250 euroa. c) Jos $(1 + x/100)85,6a = 100a$ eli $0,856x = 14,4$, on $x \approx 16,822$. Vastaus: a) laskenut 14,4 %, b) 6250 euroa, c) 16,8 %.
- 15.** Ääniä annettiin 100. Jos hampurilaiset olisivat yhtä suosittuja, saisi kukin 25 ääntä. Siis $\chi^2 = \frac{1}{25}((18 - 25)^2 + (23 - 25)^2 + (35 - 25)^2 + (24 - 25)^2) = \frac{1}{25} \cdot 154 = 6,16$. Taulukon mukaan on merkitsevyydestasolla $p = 0,05$ kolmelle vapausasteelle $\chi^2 \geq 7,815$. Koska $6,16 < 7,815$, ei voida päätellä, että hampurilaisten suosiossa olisi eroja.