Pitkä matematiikka 26.3.2003, ratkaisut:

1. **a)** $\sqrt{3\frac{3}{4}}\Big/\sqrt{1\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{15}{4}\cdot\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

b) $(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2)\Big/(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{x^2-y^2} = \dfrac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$.

2. Jos kolmion sivun pituus on a, on ympäri piirretyn ympyrän säde $r_y = a/\sqrt{3}$ ja sisään piirretyn ympyrän säde $r_s = a\sqrt{3}/6$. Tällöin $r_y/r_s = 2$. Ympyröiden alojen suhde on $(r_y/r_s)^2 = 4$. Ympäri piirretyn ympyrän ala on $100(4-1) = 300$ % suurempi.

3. Jos laudasta sahataan p palaa, on neliön sivu $95p$ mm. Palojen yhteispituus on $p\cdot 95p$ mm. Saadaan epäyhtälö $95p^2 \leq 1600$ eli $p \leq \sqrt{1600/95} \approx 4{,}104$. Suurin $p = 4$ ja pisin neliön sivu $4\cdot 95 = 380$. Vastaus: 380 mm.

4. Jos pyrkijöitä on $100a$, heistä epäonnistuu molemmissa kokeissa $10a$, vain matematiikassa $25a - 10a = 15a$ ja vain fysiikassa $17a - 10a = 7a$. Fysiikassa epäonnistunut epäonnistuu myös matematiikassa todennäköisyydellä $10a/17a = 10/17 \approx 0{,}59$. Pyrkijä eponnistuu ainakin toisessa kokeessa todennäköisyydellä $(25a + 7a)/100a = 0{,}32$.

5. **a)** Koska $2^x = 8^y = 2^{3y}$, on $x = 3y$. Sijoitus ensimmäiseen antaa $3y + 2y = 4$ eli $y = 4/5$, josta $x = 12/5$. **b)** Funktioiden $\lg|x|$ ja x^{-2} kuvaajat ovat symmetrisiä y-akselin suhteen, joten riittää tarkastella arvoja $x > 0$. Tällöin $\lg|x|$ on kasvava rajatta ja x^{-2} vähenevä kohti nollaa, joten kuvaajilla on yksi leikkauspiste x_{o}. Koska $\lg|1{,}895| < 1{,}895^{-2}$ ja $\lg|1{,}90| > 1{,}90^{-2}$, on $x_{\text{o}} \approx 1{,}90$ ja $\lg|x| \geq x^{-2}$, kun $|x| \geq 1{,}90$.

6. Koska kyse on kolmion kulmista, on $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Siten $\sin\alpha\sin\beta = \cos(\pi-\alpha-\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$. Tästä seuraa, että $\cos\alpha\cos\beta = 0$ eli joko $\alpha = \pi/2$ tai $\beta = \pi/2$. Kummassakin tapauksessa kolmio on suorakulmainen.

7. Suoran parametriesitys on $x = 2+3t,\ y = 3+t,\ z = 7+3t$, missä $t \in \mathbb{R}$. Suoran piste (x, y, z) on tasossa, jos $x + 2y + z = 1$ eli $2 + 3t + 2(3+t) + 7 + 3t = 1$ eli $8t + 15 = 1$, josta $t = -\frac{7}{4}$. Leikkauspisteen kordinaatit ovat $x = 2 - \frac{21}{4} = -\frac{13}{4}$, $y = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$, $z = 7 - \frac{21}{4} = \frac{7}{4}$. Vastaus: $(-\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4})$.

8. Jos yksikkösäteisen pallon sisällä olevan lieriön korkeus on h ja pohjan säde r, niin $4r^2 + h^2 = 4$ eli $r^2 = 1 - h^2/4$ ja $0 \leq h \leq 2$. Lieriön tilavuus h:ssa lausuttuna on $V(h) = \pi(1-h^2/4)h$. Derivaatta on $V'(h) = \pi(1 - 3h^2/4) = 0$, kun $h = 2/\sqrt{3}$. Koska $V(0) = V(2) = 0$ ja $V(2/\sqrt{3}) = 4\pi/(3\sqrt{3})$, antaa $h = 2/\sqrt{3}$ lieriön tilavuuden suurimman arvon. Tällöin pohjaympyrän säde $r = \sqrt{2/3}$. Lieriön ja pallon tilavuuksien suhde on $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3}{4\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Jos $y = \dfrac{x+2}{x-3}$, on $xy - 3y = x + 2$ eli $x = \dfrac{3y+2}{y-1}$. Käänteisfunktio on siis $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+2}{y-1}$. Jos $x > 3$, on $\dfrac{5}{x-3} > 0$ ja $y = 1 + \dfrac{5}{x-3} > 1$. f^{-1} on siis määritelty, kun $y > 1$. Edelleen, $f^{-1}(f(x)) = \dfrac{3\frac{x+2}{x-3}+2}{\frac{x+2}{x-3}-1} = \dfrac{3(x+2)+2(x-3)}{x+2-(x-3)} = \dfrac{5x}{5} = x$, kun $x > 3$.

10. Määritellään funktio f siten, että $f(x) = ax$, kun $0 \le x \le 1/2$ ja $f(x) = a(1-x)$, kun $1/2 \le x \le 1$. Tällöin on $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on jatkuva ja $f(0) = f(1) = 0$. Edelleen, f:n kuvaaja ja x-akseli rajoittavat kolmion, jonka kanta on 1 ja korkeus $a/2$. Kolmion ala on $a/4$. Siis $100 = \int_0^1 f(x)dx = a/4$, josta $a = 400$. Funktio f, $f(x) = 400x$, kun $0 \le x \le 1/2$ ja $f(x) = 400(1-x)$, kun $1/2 \le x \le 1$ täyttää siten ehdot.

11. Piste (x_0, y_0), $x_0^2 + y_0^2 = 1$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ja suoran $s : x_0x + y_0y = 1$ leikkauspiste. Jos $y_0 = 0$, on $x_0 = \pm 1$ ja suora s on $x = \pm 1$. Tällöin s esittää ympyrän tangenttia pisteissä $(\pm 1, 0)$. Jos $y_0 \ne 0$, on s ympyrän tangentti, jos niillä ei ole muita yhteisiä pisteitä kuin (x_0, y_0). Jos $x_0x + y_0y = 1$, on $y = (1 - x_0x)/y_0$. Tällöin $x^2+y^2 = x^2+(1-x_0x)^2/y_0^2 = (y_0^2x^2+1-2x_0x+x_0^2x^2)/y_0^2 = (x^2-2x_0x+1)/y_0^2$ ja $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2-2x_0x+1-y_0^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x_0x+x_0^2 = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)^2 = 0$. Siis on oltava $x = x_0$ ja $y = (1-x_0^2)/y_0 = y_0$. Näin ollen (x_0, y_0) on ainoa suoran ja ympyrän yhteinen piste, joten suora s on ympyrän pisteeseen (x_0, y_0) piirretty tangentti.

12. Jos jono on $a, aq, aq^2, ...$, on $a + aq + aq^2 = 3$ ja $12 = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 = a + aq + aq^2 + q^3(a + aq + aq^2) = 3 + 3q^3$. Siis $q^3 + 1 = 4$ eli $q = \sqrt[3]{3}$. Edelleen $\sum_{n=1}^{9} aq^{n-1} = 12+aq^6+aq^7+aq^8 = 12+q^6(a+aq+aq^2) = 12+3(\sqrt[3]{3})^6 = 12+3\cdot 9 = 39$. Koska $q \ge 1{,}44 > 1$, ei vastaava geometrinen sarja suppene.

13. Olkoon P pallon ulkopuolinen piste, O pallon keskipiste ja sivutkoon P:n kautta kulkeva tangentti palloa pisteessä Q. Pisteen Q kautta kulkeva, OP:tä vastaan kohtisuora taso leikatkoon janaa OP pisteessä L. Jos $x = OL$ ja h näkyvän kalotin korkeus, saadaan yhdenmuotoisista kolmioista OLQ ja OQP verranto $\dfrac{x}{r} = \dfrac{r}{r+d}$, josta $x = \dfrac{r^2}{r+d}$. Nyt $h = r - x = \dfrac{rd}{r+d}$. Kalotin ala on $2\pi rh = 2\pi\dfrac{r^2d}{r+d}$. Sen suhde pallon alaan $4\pi r^2$ on $\dfrac{2\pi r^2 d}{4\pi r^2(r+d)} = \dfrac{d}{2(r+d)}$. Siis prosentuaalinen näkymä $p(r,d) = \dfrac{50d}{r+d}$. Edelleen $\lim\limits_{d\to\infty} p(r,d) = \lim\limits_{d\to\infty} \dfrac{50}{r/d+1} = 50$. Jos $r = 6370$ km ja $d = 500$ km, on $p(r,d)$ $= \dfrac{2500}{687} \approx 3{,}6390$. Satelliitista näkyy 3,6 % maapallon pinnasta.

14. Jos $a = 0$, on alkuarvotehtävän ratkaisu $y = 0$. Oletetaan sitten, että $a \ne 0$. Yhtälössä voidaan erottaa muuttujat, jolloin $\dfrac{dy}{y^2} = dx$ eli $-\dfrac{1}{y} = x + c$ eli $y = -\dfrac{1}{x+c}$. Alkuehdosta saadaan $a = y(0) = -\dfrac{1}{c}$ eli $c = -\dfrac{1}{a}$, joten alkuarvotehtävän ratkaisu on $y_a(x) = -\dfrac{1}{x-1/a} = \dfrac{a}{1-ax}$. Selvästi $\lim\limits_{a\to 0} y_a(1) = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{a}{1-a} = 0$.

15. Nyt $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, $z_2 = \cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi = i$, $z_3 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = -1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$, $z_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Pisteet sijaitsevat $\pi/4$:n välein yksikköympyrän kehän yläpuoliskossa. Jos $w_j = f(z_j) = z_j^2$, niin $w_0 = 1^2 = 1$, $w_1 = (1+i)^2/2 = i$, $w_2 = i^2 = -1$, $w_3 = (-1+i)^2/2 = -i$, $w_4 = (-1)^2 = 1 = w_0$. Pisteet sijaitsevat $\pi/2$:n välein yksikköympyrän kehällä niin, että $w_4 = w_0$.