

## Lyhyt matematiikka 19.3.2004, ratkaisut:

1. a)  $x(x + 1) = 156$  on toisen asteen yhtälö  $x^2 + x - 156 = 0$ . Ratkaisu on  $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 156}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 25)$ . Vastaus:  $x$  on  $-13$  tai  $12$ .
- b) Vähentämällä toinen ensimmäisestä saadaan yhtälö  $4y = -12$ , josta  $y = -3$ . Sijoittamalla tämä toiseen saadaan  $x = \frac{1}{2}(4 - 3) = \frac{1}{2}$ . Vastaus:  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = -3$ .
2. a) Tavaramäärä on yhteensä 1479 tuhatta tonnia vastaten sektoridiagrammissa  $360^\circ$ . Siten prosenttiosuuksiksi (%) ja sektoreiden keskuskulmiksi ( $\alpha$ ) saadaan
- | Toimiala                        | %     | $\alpha$ |
|---------------------------------|-------|----------|
| Elintarvikkeet                  | 12,58 | 45,3     |
| Kemian teollisuuden tuotteet    | 7,51  | 27,0     |
| Radio-,TV- ja tietokonelaitteet | 6,96  | 25,1     |
| Muut koneet ja laitteet         | 13,25 | 47,7     |
| Muut                            | 30,22 | 108,8    |
| Erittelemätön                   | 29,48 | 106,1    |
- b) Jos koko kauttakulkuviennin arvo on  $x$  miljardia euroa, on  $0,28x = 3,5$ , josta  $x = 12,5$ . Vastaus: 12,5 miljardia euroa.
3. Jos miehiä on  $x$ , on naisia  $1,25x$ . Tästä saadaan yhtälö  $x + 1,25x = 207$ , josta  $x = 92$  ja  $1,25x = 115$ . Vastaus: Naisopiskelijoita 115 ja miesopiskelijoita 92.
4. Yksi cm kartalla on 200 m luonnossa. Näin ollen kartalla  $2,9 \text{ cm}^2$  palsta on luonnossa  $2,9 \cdot 200^2 \text{ m}^2 = 2,9 \cdot 4 \text{ ha} = 11,6 \text{ ha}$ . Maksimivirhe on  $0,1 \cdot 4 \text{ ha} = 0,4 \text{ ha}$ .
5. Junien A ja B etäisyys on  $12 \cdot 85/60 \text{ km} = 17 \text{ km}$ . Kun C kohtaa A:n, on B siis 17 km päässä. Junat lähestyvät toisiaan nopeudella  $(85+105) \text{ km/h} = 190 \text{ km/h}$ . Koh- taamiseen menee aikaa  $60 \cdot 17/190 \text{ min} = 5,37 \text{ min}$ . Vastaus: 5,4 minuutin kuluttua.
6. a) Alkeistapauksia on  $6 \cdot 6 = 36$ . Suotuisia ovat parit  $(6,3)$ ,  $(6,4)$ ,  $(6,5)$ ,  $(6,6)$ ,  $(5,4)$ ,  $(5,5)$ ,  $(5,6)$ ,  $(4,5)$ ,  $(4,6)$  ja  $(3,6)$ , joita on 10. Todennäköisyys on  $10/36 = 5/18$ .
- b) Kahdesti heitettäessä todennäköisyys on  $(5/18)^2 = 25/324$ . Vastaus: a)  $\frac{5}{18}$ , b)  $\frac{25}{324}$ .
7. Yhteisten pisteiden  $x$ -koordinaatit toteuttavat yhtälön  $x^2 + 4x + 5 = -x^2 + 3$  eli  $2x^2 + 4x + 2 = 0$  eli  $2(x + 1)^2 = 0$ . Ratkaisuja on vain yksi,  $x = -1$ , joten yhteisiä pisteitä on vain yksi,  $(-1, y(-1)) = (-1, 2)$ . Koska  $\frac{d}{dx}(-x^2 + 3) = -2x$ , on pisteeseen  $(-1, 2)$  asetetun tangentin kulmakerroin  $k = -2(-1) = 2$ . Tangentin yhtälö on siten  $y - 2 = 2(x + 1)$  eli  $y = 2x + 4$ .
8. Olkoon vuosittainen lainasumma  $a$  ja korkotekijä  $q$ . Velkaa on ensimmäisen vuoden jälkeen  $qa$ , toisen  $q^2a + qa$ , kolmannen  $q^3a + q^2a + qa$  ja lopulta kahdennentoista jälkeen  $q^{12}a + q^{11}a + \dots + qa$ . Tämä on geometrinen sarja, jonka summa on  $S = aq \frac{1 - q^{12}}{1 - q}$ . Sijoittamalla summakaavaan arvot  $a = 4000$  euroa ja  $q = 1,04$  saadaan, että  $S = 62\,507,35$  euroa. Vastaus: Velkaa on 62 507,35 euroa.

9. Olkoon  $BP = x$  ja  $QD = y$ . Suorakulmion ala on  $ab$ . Kolmion  $ABP$  alan on oltava sen kolmasosa, joten  $\frac{1}{2}xa = \frac{1}{3}ab$ , josta  $x = \frac{2}{3}b$ . Vastaavasti saadaan kolmiosta  $ADQ$ , että  $\frac{1}{2}yb = \frac{1}{3}ab$ , josta  $y = \frac{2}{3}a$ . Vastaus:  $BP = \frac{2}{3}b$  ja  $QD = \frac{2}{3}a$ .
10. Luku  $a \geq 0$  on luvun  $b$  neliöjuuri, jos  $a^2 = b$ . Koska  $3 - \sqrt{5} \geq 0$  ja  $(3 - \sqrt{5})^2 = 3^2 - 6\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$ , on  $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}$ .
11. Olkoon kone Kalajärven yläpuolella pisteessä  $A$  ja viiden kilometrin päässä pisteessä  $B$  ja olkoon piste  $C$  1100 jalkaa pisteen  $B$  alapuolella. Tällöin  $ABC$  on suorakulmainen kolmio, missä kateetti  $AC = 5,0$  km ja kateetti  $BC = 1100$  jalkaa  $= 335,5$  m. Kone nousi kulmassa  $\alpha = \angle BAC$ , jolle  $\tan \alpha = 335,5/5000 = 0,0671$ . Näin ollen  $\alpha \approx 3,84^\circ$ . Koneen nopeus maahan nähden oli  $1,852 \cdot 285$  km/h  $= 527,82$  km/h, joten se kulki 5,0 km matkaa  $3600 \cdot 5,0/527,82$  s  $\approx 34,10$  s. Vastaus: Kone nousi  $3,8^\circ$  kulmassa ja välin lento kesti 34 s.
12. a) Asutuksen ikä 7500 vuotta on  $x = 7500/5730 \approx 1,30890$  kertaa C-14:n puoliintumisaika. Jos C-14 isotoopin määrä oli alussa  $m$ , on se nyt  $(0,5)^x m \approx 0,40363m$ . Vähentyminen on prosentteissa  $100(1 - 0,40363) \approx 59,637$ . b) Jos C-14 määrä  $m$  alentuu 30 prosenttiin  $t = 5730y$  vuodessa, on  $(0,5)^y m = 0,3m$ . Tällöin  $y = \frac{\ln 0,3}{\ln 0,5}$  ja  $t = 5730y \approx 9952,8 = 7500 + 2452,8$  vuotta. Vastaus: a) 59,6 %, b) 2450 vuotta lisää.
13. Olkoon pohjan sivun pituus  $x$  cm ja laatikon korkeus  $h$  cm, jolloin tilavuus on  $V$  cm<sup>3</sup>  $= hx^2$  cm<sup>3</sup>. Nyt  $x^2 + 4hx = 1200$ , josta  $h = \frac{1}{4}(1200 - x^2)$ . Tilavuus on  $x$ :n funktiona  $V = \frac{1}{4}(1200x - x^3)$ . Derivaatta  $V' = \frac{1}{4}(1200 - 3x^2) = 0$ , kun  $x^2 = 400$  eli  $x = 20$ . Koska  $V' > 0$ , kun  $0 < x < 20$  ja  $V' < 0$ , kun  $x > 20$ , saavuttaa  $V$  kohdassa  $x = 20$  suurimman arvonsa. Tällöin  $h = \frac{1}{80}(1200 - 400) = 10$  ja  $V = 10 \cdot 20^2 = 4000$ . Vastaus: Tilavuus on 4000 cm<sup>3</sup>, korkeus 10 cm ja pohjan sivun pituus 20 cm.
14. Jos  $h$  on pituus, on määrättävä  $P(h > 200)$  normaalijakaumassa  $N(180,0; 5,8)$ . Siirrytään normitettuun jakaumaan  $N(0,1)$  muunnoksella  $z = \frac{h - 180}{5,8}$  ja  $z_0 = \frac{200 - 180}{5,8} \approx 3,448$ . Tällöin  $P(h > 200) = P(z > z_0) = 1 - P(z \leq z_0)$ . Taulukon mukaan  $P(z \leq z_0) = \Phi(3,448) = 0,9997$ , joten  $P(h > 200) = 0,0003$ . Vastaus: 0,03 %.
15. Tasaerälainassa kertalyhennys  $A = Kq^n \frac{q - 1}{q^n - 1}$ , missä  $K$  on lainamäärä,  $q$  korkotekijä ja  $n$  lyhennysten lukumäärä. Sijoittamalla kaavaan  $K = 40\,000$  euroa,  $q = 1,04$  ja  $n = 10$  saadaan, että  $A \approx 4931,638$  euroa. Lainaa on jäljellä  $k$  vuoden jälkeen  $V_k = Kq^k - A \frac{q^k - 1}{q - 1}$ . Jos  $K$ ,  $A$  ja  $q$  ovat kuten edellä, on lainaa viiden vuoden jälkeen jäljellä  $V_5 = 21\,954,76$  euroa. Jos nyt korkotekijä nousee määrään  $r = 1,06$ , lyhenee laina seuraavien viiden vuoden aikana määrään  $V_{10} = V_5 r^5 - A \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 1580,31$  euroa. Tämä kasvaa lainan 11. vuonna eli vuonna 2013 määrään  $rV_{10} = 1675,13$  euroa ja maksetaan vuoden lopussa kokonaan pois. Vastaus: Erän suuruus on 4931,64 euroa, viimeinen erä on 1675,13 euroa ja se maksetaan vuoden 2013 lopussa.