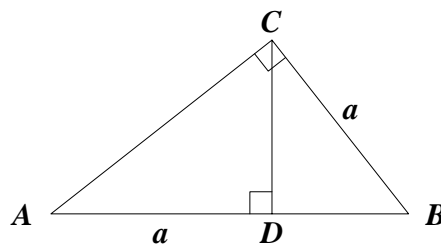




Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Sievennä lauseke  $\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x}$ . b) Ratkaise  $x$  yhtälöstä  $x^2 - ax - a^2 = 0$ .
2. a) Ratkaise yhtälöryhmä  $x + y = a$ ,  $x - y = 2a$ . b) Tiedetään, että  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  ja  $180^\circ < x < 270^\circ$ . Määritä  $\cos x$  ja  $\tan x$  (tarkat arvot).
3. Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12 % pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria olisi korotettava, jotta ne tulisivat 10 % suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti kohoavat 4 %?
4. Olkoon  $\vec{OA} = 7\vec{i} + 9\vec{j}$  tason vektori. Määritä kaikki sellaiset vektorit  $\vec{OB}$ , että kulma  $OAB$  on suora ja vektorin  $\vec{AB}$  pituus on puolet vektorin  $\vec{OA}$  pituudesta.
5. Määritä paraabelin  $y = 2x^2 + bx + 3$  huippu ja totea, että se kertoimen  $b$  arvosta riippumatta sijaitsee paraabelilla  $y = -2x^2 + 3$ .
6. Kuvion suorakulmaisessa kolmiossa on toisen kateetin projektio hypotenuusalle yhtä pitkä kuin toinen kateetti:  $AD = BC = a$ . Määritä kolmion kulmat asteen tarkkuudella.

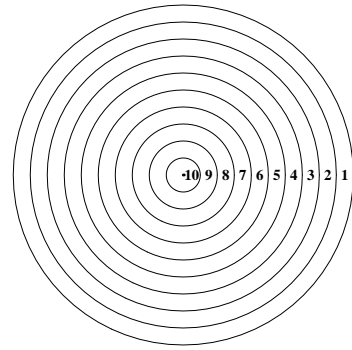


7. Luvulle  $\pi$  saadaan karkea likiarvo sijoittamalla ympyrän sisään a) säännöllinen kuusikulmio tai b) säännöllinen kahdeksankulmio ja rinnastamalla tämän  $\alpha$ ) piirin pituus tai  $\beta$ ) pinta-ala ympyrän kehän pituuteen tai vastaavasti ympyrän alaan. Laske tällä tavoin neljä eri likiarvoa luvulle  $\pi$ . Anna vastaukset tarkkoina arvoina (trigonometrisia funktioita käyttämättä) ja kolmidesimaalisina likiarvoina.
8. Anna esimerkki sellaisesta jatkuvasta funktiosta  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , että  $f$  saa arvon 6 jossakin pisteessä ja  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . Saako nämä ehdot täyttävä funktio aina arvon 0 jossakin pisteessä?

KÄÄNNÄ!

9. Tikkataulun säde on 20 cm, ja taulu jakautuu kymmeneen samankeskiseen yhtä leveään renkaaseen, jotka on numeroitu ulkoa sisäänpäin 1:stä 10:een. Gabrielin heittämät tikat osuvat tauluun siten, että niiden etäisyys  $r$  taulun keskipisteestä noudattaa todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{16000}(400 - r^2), & \text{kun } 0 \leq r \leq 20, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$



Tässä  $r$  on ilmaistu senttimetreinä. **a)** Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een. **b)** Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämistä viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een.

10. Neljännen asteen polynomilla on paikallinen maksimi 16, kun  $x = -1$ . Origossa polynomi saa arvon 11. Polynomien kuvaajan pisteeseen  $(1, 11)$  piirretyn tangentin kulmakerroin on 0. Muodosta yhtälöryhmä, josta polynomien kertoimet voidaan ratkaista. Ratkaise tämä laskinta käyttämättä. Mikä on kyseinen polynomi?
11. Rasian pohja on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 7 cm ja 15 cm. Rasian laidat kallistuvat ulospäin kaikki samassa kaltevuudessa siten, että laitojen yläreunat muodostavat suorakulmion, jonka sivujen pituudet ovat 11 cm ja 19 cm. Rasian korkeus (pystysuoraan mitattuna) on 8 cm. Laske pinta-ala rasian vaakasuoralle poikkileikkaukselle korkeudella  $z$  ( $0 \leq z \leq 8$ ,  $z$  senttimetreinä). Laske myös rasian tilavuus.
12. Olkoon funktio  $f$  jatkuva origossa. Määritä erotusosamäärän avulla funktion  $g(x) = xf(x)$  derivaatta origossa. Voidaanko tulosta soveltaa funktioon  $f(x) = |x| + 1$ ?
13. Geometrisen sarjan ensimmäinen termi on  $x^2 + 1$  ja toinen  $x^2 + 3x$ . Tutki, millä muuttujan  $x$  arvoilla sarja suppenee.
14. Etsi ratkaisut differentiaaliyhtälölle  $y'^2 - xy' + y = 0$  derivoimalla se kerran ja ratkaisemalla tällöin syntynyt uusi differentiaaliyhtälö. Ovatko tämän ratkaisut myös alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja? Piirrä alkuperäisen yhtälön ratkaisujen kuvaajia.
15. Määritä funktion  $f(x) = x \sin x$  pienin positiivinen ääriarvokohta ja vastaava ääriarvo ratkaisemalla derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä. Anna vastaukset viiden desimaalin tarkkuudella. Hahmottele funktion kuvaaja välillä  $[0, 2\pi]$ .