

**Lyhyt matematiikka 24.3.2006, ratkaisut:**

1. a)  $20x^2 - 49x + 9 = 0$ , kun  $x = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 20 \cdot 9}}{40} = \frac{49 \pm 41}{40}$  eli  $x = \frac{9}{4}$  tai  $x = \frac{1}{5}$ .

b) Kertomalla kuudella saadaan yhtälö muotoon  $2x + 4 = 3x$ , jonka ratkaisu on  $x = 4$ .

Vastaus: a) Ratkaisut ovat  $x = \frac{9}{4}$  ja  $x = \frac{1}{5}$ . b) Ratkaisu on  $x = 4$ .

2. a)  $\frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1-x}{3} = \frac{x+1-x}{3} = \frac{1}{3}$ .

b)  $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$ .

c)  $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7} = x^{3+n+4+n-7} = x^{2n}$ .

3. a) Kolmiosta  $ADE$  saadaan neliön sivun pituudelle  $x$  yhtälö  $x^2 + 1 = 3^2$  eli  $x^2 = 8$ , jonka ratkaisu on  $x = 2\sqrt{2}$ .

b) Neliön pinta-ala on  $x^2 = 8$ .

c) Kolmiosta  $ABD$  saadaan neliön lävistäjän pituudelle  $d$  yhtälö  $d^2 = 8 + 8$ , jonka ratkaisu on  $d = 4$ .

Vastaus: a)  $2\sqrt{2}$ , b) 8, c) 4.

4. Kappaleen painon lauseke on  $m = \frac{a}{r^2}$ , missä  $r$  on etäisyys maan keskipisteestä ja  $a$  verrannollisuuskerroin. Lentokoneen painosta maan pinnalla saadaan  $56 = \frac{a}{6370^2}$ , josta ratkeaa  $a = 56 \cdot 6370^2$ . Koneen painoksi 10 kilometrin korkeudessa saadaan siten  $m_{10} = \frac{56 \cdot 6370^2}{(6370 + 10)^2} \approx 55,8246$ .

Vastaus: 55,8 tonnia.

5. Jos kokonaisvienti vuonna 2003 oli  $100a$ , oli puu- ja paperiteollisuuden vienti  $25,4a$ . Vuonna 2004 se oli  $1,136 \cdot 25,4a = 28,854a$ . Vastavasti saadaan vuoden 2004 muut vientimäärät oheiseen taulukkoon.

Toimiala	Määrä 2003	Kerroin	Määrä 2004	Jakauma 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	$25,4a$	1,136	$28,854a$	27,3
Kemianteollisuus	$8,7a$	1,044	$9,083a$	8,6
Kone- ja metalliteollisuus	$25,1a$	0,956	$23,996a$	22,7
Sähkötekninen teollisuus	$24,3a$	1,019	$24,762a$	23,4
Muut	$16,5a$	1,146	$18,909a$	17,9
Vienti yhteensä	$100a$		$105,604a$	100

a) Yhteensä saadaan vuoden 2004 kokonaisvienniksi  $105,603a$ . Se on kasvanut edellisestä vuodesta 5,6 %.

b) Käyttäen vuoden 2004 kokonaisvientiä kantalukuna saadaan viennin prosentuaalinen jakauma toimialoittain viimeiseen sarakkeeseen.

6. Moottoritien pituus on  $75 \text{ km} - 28 \text{ km} = 47 \text{ km}$ . Jos keskinopeus siellä oli  $x \text{ km/h}$ , on  $\frac{28}{80} + \frac{47}{x} = \frac{75}{100}$  eli  $(\frac{75}{100} - \frac{28}{80})x = 47$  eli  $0,4x = 47$ , jonka ratkaisu on  $x = 117,5$ .  
Vastaus:  $117,5 \text{ km/h}$ .
7. Funktion  $f(x) = x^3 - 27x + 2$  derivaatta  $f'(x) = 3x^2 - 27$ .  $f'(x) = 0$ , kun  $x = \pm 3$ . Koska  $f'$ :n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, on  $f'(x) > 0$ , kun  $x < -3$  tai  $x > 3$  ja  $f'(x) < 0$ , kun  $-3 < x < 3$ .  
Vastaus: Funktio  $f(x)$  on kasvava, kun  $x < -3$  tai  $x > 3$  ja vähenevä, kun  $-3 \leq x \leq 3$ .
8. a) Olkoon  $a$  päästömäärä alussa ja  $p$  tavoiteltu vähennysprosentti sekä  $q = 1 - \frac{1}{100}p$ . Tällöin  $q^4 a = 0,8a$ , josta  $q = \sqrt[4]{0,8}$  ja edelleen  $p = 100(1 - \sqrt[4]{0,8}) \approx 5,4258$ .  
b) Jos kysytty vuosimäärä on  $n$ , on oltava  $(\sqrt[4]{0,8})^n a \leq 0,5a$ . Ottamalla logaritmit saadaan  $n \log \sqrt[4]{0,8} \leq \log 0,5$ , josta  $n \geq \frac{\log 0,5}{\log \sqrt[4]{0,8}} \approx 12,425$ .  
Vastaus: a)  $5,4 \%$ , b)  $13$  vuoden kuluttua.
9. a) Binomitodennäköisyyden kaavan mukaan täsmälleen kahden kuutosen todennäköisyys on  $\binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 \approx 0,160751$ .  
b) Vastaavasti saadaan enintään yhden kuutosen todennäköisyydeksi  $\binom{5}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5 + \binom{5}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^4 \approx 0,803755$ . Kysytty vähintään kahden kuutosen tapaus on tämän komplementtitapaus. Sen todennäköisyys on  $1 - 0,803755 = 0,196245$ .  
Vastaus: a)  $0,1608$ , b)  $0,1962$ .
10. Pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin on  $\frac{-1+2}{6-1} = \frac{1}{5}$ , joten suoran yhtälö on  $y + 2 = \frac{1}{5}(x - 1)$  eli  $x - 5y - 11 = 0$ . Pisteiden  $D$  etäisyys  $A$ :n ja  $B$ :n kautta kulkevasta suorasta on  $d = \frac{|2 - 5 - 11|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{14}{\sqrt{26}}$ . Tämä on samalla suunnikkaan korkeusjanan  $DE$  pituus. Suunnikkaan kannan pituus  $AB = \sqrt{(6-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}$ . Suunnikkaan ala on  $AB \cdot d = 14$ . Pisteessä  $A$  olevan kulman  $\alpha$  suuruus saadaan kolmiosta  $ADE$ , jossa  $AD = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$  ja  $DE = d$ . Näin ollen  $\sin \alpha = \frac{14}{\sqrt{10}\sqrt{26}} \approx 0,8682431$ , josta  $\alpha \approx 60,2551^\circ$ . Tämä on samalla  $C$ :ssä olevan kulman suuruus. Muut kaksi kulmaa ovat suuruudeltaan  $180^\circ - \alpha \approx 119,7449^\circ$ .  
Vastaus: Pinta-ala on  $14$  sekä kulmat  $A$  ja  $C$   $60,3^\circ$  sekä  $B$  ja  $D$   $119,7^\circ$ .
11. Aritmeettisen jonon  $a_1, a_2, \dots, a_n$  termit ovat muotoa  $a_2 = a_1 + d$ ,  $a_3 = a_1 + 2d$ , ...,  $a_n = a_1 + (n-1)d$ . Nyt  $d = a_2 - a_1 = 7 - \frac{3}{2} = 5,5$ . Edelleen  $117 = a_n = \frac{3}{2} + (n-1)5,5$ , josta saadaan, että  $n = 22$ . Aritmeettisen jonon summa on siten  $n \frac{1}{2}(a_1 + a_n) = 22 \cdot \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + 117) = 1303,5$ .  
Vastaus:  $1303,5$ .

12.  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 \iff x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \iff xy = 0$ . Viimeinen yhtälö toteutuu, jos  $x = 0$  tai  $y = 0$  (tai molemmat ovat nolla).

$(x - y)^2 = x^2 - y^2 \iff x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - y^2 \iff 2y^2 - 2xy = 0 \iff y(y - x) = 0$ . Tämä toteutuu, jos  $y = 0$  tai  $y = x$ . Näin ollen esimerkiksi lukupari  $x = 1, y = 1$  toteuttaa jälkimmäisen kaavan, muttei edellistä, koska kumpikaan ei ole nolla.

13. Jos kartion korkeus on  $h$  cm ja pohjaympyrän säde  $r$  cm, on  $h + 2r = 18,6$  eli  $h = 18,6 - 2r$ . Kartion tilavuus on  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(18,6 - 2r) = \frac{1}{3}\pi(18,6r^2 - 2r^3)$ . Tilavuuden  $V(r)$  derivaatta  $V'(r) = \frac{1}{3}\pi(37,2r - 6r^2) = 0$ , kun  $r = 0$  tai  $37,2 - 6r = 0$  eli  $r = 6,2$ . Arvo  $r = 0$  ei tule kysymykseen. Koska  $V'(r)$ :n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on  $V'(r) > 0$ , kun  $0 < r < 6,2$  ja  $V'(r) < 0$ , kun  $r > 6,2$ . Näin ollen  $r = 6,2$  antaa tilavuuden suurimman arvon, joka on  $V(6,2) = \frac{1}{3}\pi 6,2^2(18,6 - 2 \cdot 6,2) \approx 249,576$ .  
Vastaus: Kun säde on 6,2 cm, saadaan suurin tilavuus 249,6 cm<sup>3</sup>.

14. Puolivuotislainan annuiteetin kaava on  $A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}$ , missä  $K = 120\,000$  euroa,  $q = 1 + \frac{1}{200}3,70 = 1,0185$  korkotekijä ja  $n$  hoitomaksujen määrä.

a) Nyt  $n = 44$  ja  $A = 120\,000 \cdot 1,0185^{44} \frac{0,0185}{1,0185^{44} - 1} \approx 4010,044$ .

b) Nyt  $n = 120$ . Sijoittamalla se em. kaavaan arvon 44 tilalle saadaan  $A \approx 2496,72$ . Kun edellinen laina on maksettu loppuun 22 vuoden kuluttua, saadaan jälkimmäisen jäljellä oleva määrä kaavasta

$$V = 120\,000 \cdot 1,0185^{44} - 2496,72 \frac{1 - 1,0185^{44}}{1 - 1,0185} \approx 101\,449,39$$

Vastaus: Annuiteetti on a) 4010,04 euroa b) 2496,72 euroa. Edellisen loputtua on jälkimmäistä jäljellä 101 449,39 euroa.

15. Ilpon säädöllä leikkauskohta  $x$  noudattaa normaalijakaumaa  $N(2000; 0,19)$ . Tällöin  $z = \frac{x - 2000}{0,19}$  noudattaa normitettua normaalijakaumaa  $N(0, 1)$ . Hyväksyttävien profiilien todennäköisyys on

$$P(1999,6 < x < 2000,4) = P\left(\frac{1999,6 - 2000}{0,19} < z < \frac{2000,4 - 2000}{0,19}\right) =$$

$$P(-2,105 < z < 2,105) = 2\Phi(2,105) - 1 = 2 \cdot 0,9824 - 1 = 0,9648.$$

Hukkakappaleiden todennäköisyys on siten Ilpolla  $1 - 0,9648 = 0,0352$ .

Vastaavasti Anteron säädöllä leikkauskohta  $x \sim N(2000; 0,24)$  ja  $z = \frac{x - 2000}{0,24} \sim$

$N(0, 1)$ . Hyväksyttävien profiilien todennäköisyys on

$$P(1999,6 < x < 2000,4) = P\left(\frac{1999,6 - 2000}{0,24} < z < \frac{2000,4 - 2000}{0,24}\right) =$$

$$P(-1,667 < z < 1,667) = 2\Phi(1,667) - 1 = 2 \cdot 0,9522 - 1 = 0,9044.$$

Hukkakappaleiden todennäköisyys on Anterolla  $1 - 0,9044 = 0,0956$ .

Anteron säädöillä hukkakappaleita tulee enemmän luvun ollessa prosentteissa

$$100 \cdot \frac{0,0956 - 0,0352}{0,0352} \approx 171,6.$$

Vastaus: Anteron säädöillä tulee keskimäärin 172 % enemmän hukkakappaleita.