



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise x yhtälöstä $4x + 2 = 3 - 2(x + 4)$.
b) Missä pisteessä suora $y = 3x - 4$ leikkaa x -akselia?
c) Sievennä lauseke $\frac{1}{a-1} \left(a - \frac{1}{a} \right)$.
2. a) Derivoi funktio $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} - 4$ ($x > 0$).
b) Laske $\int (x^2 + \sin 2x) dx$.
c) Sievennä lauseke $\log(xy^2) - 2\log y$ ($x > 0, y > 0$).
3. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 15 cm ja piiri 36 cm. Määritä kateettien pituudet.
4. Kesämökin rakentaminen tuli 25 % arvioitua kalliimmaksi. Rakennustarvikkeet olivat 19 % ja muut kustannukset 28 % arvioitua kalliimpia. Mikä oli rakennustarvikkeiden arvioitu osuus ja mikä lopullinen osuus kokonaiskustannuksista?
5. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $\sin x = 5 - a^2 \sin x$ on ratkaisuja?
6. Tutki, ovatko pisteet $P = (4, 1, -2)$ ja $Q = (0, 2, 4)$ pisteiden $A = (1, 1, 1)$ ja $B = (-1, 1, 3)$ määräämällä suoralla.
7. Etsi yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on suoralla $y = \frac{1}{2}x$ ja joka sivuaa x -akselia ja suoraa $4x + 3y - 24 = 0$. Määritä kaikki tehtävän ratkaisut.
8. Yritys valmistaa pallon muotoisia kaasusäiliöitä, joiden tilavuuden on tarkoitus olla 5000 litraa. Enintään 65 litran poikkeama jompaankumpaan suuntaan hyväksytään. Laske tavoitteena oleva säiliön halkaisija ja virherajojen mukaiset halkaisijat. Millä todennäköisyydellä valmistusprosessissa syntyy hyväksyttäviä säiliöitä, kun halkaisijoiden poikkeamat tavoitteesta ovat normaalisti jakautuneita parametrein $\mu = 0$ cm, $\sigma = 1,75$ cm?
9. Käyrän $y = 2\ln(x + 1)$, $0 \leq x \leq e - 1$, pyörähtäessä y -akselin ympäri syntyy suppilomainen astia. Laske sen tilavuus. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.
10. Tulta syöksevät lohikäärmeet Draco ja Nid vartioivat solaa, ja solassa kulkeva jouuu menemään niiden välistä. Lohikäärmeiden välinen etäisyys on 200 kyynärää. Tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen lohikäärmeestä mitatun etäisyyden kolmanteen potenssiin. Draco on kaksi kertaa niin suuri kuin Nid. Mistä kohtaa lohikäärmeiden välistä kulkijan on vaellettava, jotta hän selviäisi mahdollisimman vähällä? Anna vastaus kyynärän tarkkuudella.

KÄÄNNÄ!

- 11.** Tutki, millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \dots$$

suppenee, ja laske sen summa.

- 12.** Tiedetään, että funktio f kasvaa varsin tarkoin lineaarisesti (suoraviivaisesti) välillä $[1,9995; 2,0005]$. Lisäksi tiedetään funktion arvot $f(2) = 3,7458053$ ja $f(2,0005) = 3,7458664$. Määritä tämän perusteella likiarvo derivaatalle $f'(2)$.

- 13.** Olkoon $f(x) = e^{-x} + 1$, $x \in [1, 2]$. Osoita, että

$$1 < f(x) < 2 \quad \text{ja} \quad |f'(x)| < 0,4.$$

Tiedetään, että tällöin yhtälö $x = f(x)$ voidaan ratkaista numeerisesti muodostamalla yhtälön ratkaisua kohden suppeneva jono $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ seuraavalla tavalla: $x_0 \in [1, 2]$, $x_n = f(x_{n-1})$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$. Määritä tällä tavoin yhtälön ratkaisu neljän merkitsevän numeron tarkkuudella lähtemällä arvosta $x_0 = 1,3$. Ilmoita laskemasi jonon termit.

- 14.** Olkoon

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}.$$

Laske funktion derivaatta. Laske likiarvot funktion arvoille $f(-2)$ ja $f(2)$. Piirrä funktion kuvaaja.

- 15.** Muodosta totuusarvotaulut lauseille (propositioille) $p \Rightarrow q$ ja $\neg q \Rightarrow \neg p$, ja osoita, että lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ on tautologia.