

Pitkä matematiikka 24.3.2006, ratkaisut:

1. a) $4x + 2 = 3 - 2(x + 4) \iff 6x = -7 \iff x = -\frac{7}{6}$.
- b) Leikkauspisteen y -koordinaatti on 0, joten x -koordinaatille pätee $3x - 4 = 0 \iff x = \frac{4}{3}$. *Vastaus:* Pisteessä $(\frac{4}{3}, 0)$.
- c) $\frac{1}{a-1}(a - \frac{1}{a}) = \frac{a^2 - 1}{(a-1)a} = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$.
2. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}$.
- b) $\int(x^2 + \sin 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.
- c) $\log(xy^2) - 2\log y = \log x + \log y^2 - 2\log y = \log x$.
3. Jos kateettien pituudet ovat a cm ja b cm, on $a + b + 15 = 36$ ja $a^2 + b^2 = 15^2$. Tämän mukaan on $a^2 + (21 - a)^2 = 225$ eli $a^2 - 21a + 108 = 0$. Yhtälön ratkaisut ovat $a = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 108}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2}$. Näin ollen $a = 12$, jolloin $b = 21 - a = 9$ tai $a = 9$, jolloin $b = 21 - a = 12$.
- Vastaus:* 9 cm ja 12 cm.
4. Jos kokonaiskustannusarvio oli a ja rakennustarvikkeiden osuus siitä xa , oli muiden kustannusten arvio $(1 - x)a$. Kustannusten noususta saadaan x :lle yhtälö $1,19xa + 1,28(1 - x)a = 1,25a$ eli $0,09x = 0,03$. Tämän ratkaisu on $x = \frac{1}{3}$, joten rakennustarvikkeiden arvioitu osuus oli 33,33 %. Rakennustarvikkeiden lopullinen osuus oli $1,19 \cdot \frac{1}{3}a$, mikä oli prosentteina $100 \cdot \frac{1,19a}{3 \cdot 1,25a} \approx 31,73$.
- Vastaus:* Arvioitu osuus oli 33,3 % ja lopullinen 31,7 %.
5. Muutetaan yhtälö $\sin x = 5 - a^2 \sin x$ muotoon $\sin x = \frac{5}{1 + a^2}$. Koska $-1 \leq \sin x \leq 1$ ja $\frac{5}{1 + a^2} > 0$, on oltava $\frac{5}{1 + a^2} \leq 1$ eli $5 \leq 1 + a^2$ eli $a^2 \geq 4$ eli $|a| \geq 2$.
- Vastaus:* Arvoilla $a \leq -2$ ja $a \geq 2$.
6. Pisteiden A ja B määräämän avaruussuoran s suuntajana $\overline{AB} = (-1 - 1)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} + (3 - 1)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$. Koska $\overline{AP} = (4 - 1)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} + (-2 - 1)\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{k} = -\frac{3}{2}\overline{AB}$, suuntajana \overline{AP} ja \overline{AB} ovat yhdensuuntaiset. Koska ne alkavat samasta pisteestä, on P suoralla s . Edelleen $\overline{AQ} = (0 - 1)\vec{i} + (2 - 1)\vec{j} + (4 - 1)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Jos olisi vakio t siten, että $\overline{AQ} = t\overline{AB}$, olisi myös $\vec{j} \cdot \overline{AQ} = \vec{j} \cdot t\overline{AB}$ eli $1 = 0$, mikä on mahdotonta. Näin ollen vektorit \overline{AQ} ja \overline{AB} eivät ole yhdensuuntaisia, joten Q ei ole suoralla s .
- Vastaus:* Piste P on pisteiden A ja B määräämällä suoralla, mutta piste Q ei ole.

7. Jos keskipisteen y -koordinaatti on y_0 , on x -koordinaatti $x_0 = 2y_0$. Koska ympyrä sivuaa x -akselia on sen säde $r = |y_0|$. Toisaalta myös keskipisteen etäisyys suorasta $4x + 3y - 24 = 0$ on säde. Tästä saadaan yhtälö $\frac{|4 \cdot 2y_0 + 3y_0 - 24|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = |y_0|$ eli $|11y_0 - 24| = 5|y_0|$. Näin ollen joko $11y_0 - 24 = 5y_0$ tai $11y_0 - 24 = -5y_0$. Edellisen ratkaisu on $y_0 = 4$ ja jälkimmäisen $y_0 = \frac{3}{2}$. Vastaavat säteet ovat $r = 4$ ja $r = \frac{3}{2}$ sekä x -koordinaatit $x_0 = 8$ ja $x_0 = 3$. Ehdot toteuttavien ympyröiden yhtälöt ovat $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ ja $(x - 3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Vastaus: $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$.

8. Pallon tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Jos tilavuus tunnetaan, on pallon halkaisija $d = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Tavoitteena olevan 5000 l säiliön halkaisija on $d = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5000}{4\pi}} \approx 21,2157$

(dm). Virherajojen mukaiset halkaisijat ovat $d_1 = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot (5000 - 65)}{4\pi}} \approx 21,1234$ (dm)

ja $d_2 = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot (5000 + 65)}{4\pi}} \approx 21,3072$ (dm). Hyväksytyjen säiliöiden halkaisijoiden poikkeamien e cm on oltava lukujen $d_1 - d = -0,9234$ (cm) ja $d_2 - d = 0,9154$ (cm) välissä.

Normitetussa normaalijakaumassa $N(0, 1)$ sallittujen poikkeamien rajat ovat $e_1 = -0,9234/1,75 \approx -0,5276$ (cm) ja $e_2 = 0,9154/1,75 \approx 0,5231$ (cm). Kysytty todennäköisyys on $P(e_1 \leq e \leq e_2) = \Phi(e_2) - \Phi(e_1) = \Phi(e_2) + \Phi(-e_1) - 1 \approx 0,401$.

Vastaus: Tavoitteena oleva halkaisija on 212,2 cm ja virherajojen mukaiset halkaisijat 211,2 cm ja 213,1 cm. Hyväksyttäviä säiliöitä syntyy 40 % todennäköisyydellä.

9. Jos $y = 2 \ln(x + 1)$, on $e^y = e^{2 \ln(x+1)} = (x + 1)^2$ eli $e^{y/2} = x + 1$, josta $x = e^{y/2} - 1$. Jos $0 \leq x \leq e - 1$, on $0 \leq y \leq 2$. Pyörähdykappaleen tilavuus on $V = \pi \int_0^2 x(y)^2 dy = \pi \int_0^2 (e^y - 2e^{y/2} + 1) dy = \pi \int_0^2 (e^y - 4e^{y/2} + y) = \pi(e^2 - 4e + 5) \approx 4,7624$.

Vastaus: $\pi(e^2 - 4e + 5) \approx 4,76$.

10. Olkoon kulkija lohikäärmeiden välissä etäisyydellä x Dracosta ja $200 - x$ Nidistä. Jos tässä kohtaa Dracon tulisuihkun vaikutus on $\frac{2a}{x^3}$, on Nidin tulisuihkun vaikutus

$\frac{a}{(200 - x)^3}$. Tässä a on verrannollisuuskerroin. On määrättävä yhteisvaikutuksen

$f(x) = \frac{2a}{x^3} + \frac{a}{(200 - x)^3}$ minimi. Derivaatta $f'(x) = -\frac{6a}{x^4} + \frac{3a}{(200 - x)^4}$ on nolla, kun

$\frac{2}{x^4} = \frac{1}{(200 - x)^4}$ eli $x^4 = 2(200 - x)^4$ eli $x = \pm \sqrt[4]{2}(200 - x)$. Tämän ratkaisut ovat

$x_1 = \frac{200 \cdot \sqrt[4]{2}}{1 + \sqrt[4]{2}} \approx 108,64$ ja $x_2 = \frac{200 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1} \approx 1257,04$. Näistä vain $x_1 \in [0, 200]$. Koska

$f'(x) < 0$, kun $0 < x < x_1$ ja $f'(x) > 0$, kun $x_1 < x < 200$, saa $f(x)$ pienimmän arvonsa pisteessä x_1 .

Vastaus: 109 kyynärrä Dracosta.

11. Jos $x = 0$, on sarjan jokainen termi nolla, jolloin sarjan summakin on nolla. Oletetaan sitten, että $x \neq 0$. Sarja voidaan kirjoittaa muotoon $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Tämä on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \frac{(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{1+x^2}$. Sarja suppenee, kun $|q| < 1$. Koska $\frac{1}{1+x^2} > 0$, on ehto $\frac{1}{1+x^2} < 1$ eli $1+x^2 > 1$. Näin on, kun $x \neq 0$. Sarjan summa on, kun $x \neq 0$, $\frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2-1} = 1$.

Vastaus: Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Summa on nolla, kun $x = 0$ ja 1, kun $x \neq 0$.

12. Jos funktio kasvaa lineaarisesti, on sillä esitys $f(x) = ax + b$. Tällöin $f'(x) = a$ eli myös $f'(2) = a$. Kertoimille a ja b saadaan ehdot $f(2) = 2a + b = 3,7458053$ ja $f(2,0005) = 2,0005a + b = 3,7458664$. Vähentämällä ehdot toisistaan saadaan $0,0005a = 0,0000611$, jonka ratkaisu on $a = 0,1222$.

Vastaus: $f'(2) \approx 0,1222$.

13. Funktion f derivaatta $f'(x) = -e^{-x} < 0$ aina, joten f on aidosti vähenevä. Koska $f(x) > 0$, f :n suurin arvo välillä $[1, 2]$ on $f(1) = e^{-1} + 1 \leq 1,4 < 2$ ja pienin arvo $f(2) = e^{-2} + 1 \geq 1,1 > 1$. Siis $1 < f(x) < 2$, kun $x \in [1, 2]$.

Toinen derivaatta $f''(x) = e^{-x} > 0$, joten f' on aidosti kasvava. Koska $f'(x) < 0$, on välillä $[1, 2]$ $|f'(x)| \leq |f'(1)| \leq 0,37 < 0,4$.

Yhtälön $f(x) = x$ ratkaisu saadaan siis raja-arvona jonosta x_0, x_1, x_2, \dots , missä $x_n = f(x_{n-1})$. Valitsemalla $x_0 = 1,3$ saadaan seuraavaa jonoa

n	1	2	3	4	5
x_n	1,272531	1,280122	1,278004	1,278593	1,278429
n	6	7	8	9	
x_n	1,278474	1,278462	1,278466	1,278464	

Tässä vaiheessa voidaan päätää, että kysytty ratkaisu on $x = 1,278$.

14. Funktio on määritelty, kun $x \neq -1$. Sen derivaatta on

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Koska derivaatta häviää, on funktiolla vakioarvo alueessa $x < -1$ ja myös alueessa $x > -1$.

$$f(2) = \arctan 2 + \arctan(-\frac{1}{3}) \approx 0,785398 \text{ ja } f(-2) = \arctan(-2) + \arctan(-3) \approx -2,356194.$$

Funktion kuvaaja on suora $y = f(-2)$, kun $x < -1$ ja suora $y = f(2)$, kun $x > -1$.

Vastaus: $f'(x) = 0$, $f(2) \approx 0,785398$, $f(-2) = -2,356194$.

15. Totuusarvotaulut ovat

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Koska sarakkeiden 3 ja 6 mukaan lauseilla $p \Rightarrow q$ ja $\neg q \Rightarrow \neg p$ on samat totuusarvot, on lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ tautologia.