

Lyhyt matematiikka 12.3.2008, ratkaisut:

1. a) $2x + 1 = x^2 + 2x \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.
b) Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $3x = 1$ eli $x = \frac{1}{3}$. Edelleen, $y = x = \frac{1}{3}$.
c) $\frac{5}{7} - \frac{6}{9} = \frac{45}{63} - \frac{42}{63} = \frac{3}{63} > 0$. Siis $\frac{5}{7} > \frac{6}{9}$.
Vastaus: a) $x = \pm 1$, b) $x = y = \frac{1}{3}$, c) $\frac{5}{7} > \frac{6}{9}$.
2. a) $5x - (1 - x) = 13x \iff 6x - 1 = 13x \iff 7x = -1 \iff x = -\frac{1}{7}$.
b) Luvut ovat suuruusjärjestyksessä 1, 3, 3, 3, 5, 6, 7. Mediaani on 3. Keskiarvo on $\frac{1 + 3 + 3 + 3 + 5 + 6 + 7}{7} = 4$.
c) $\frac{a+3}{a} : \frac{3a+9}{2a} = \frac{a+3}{a} \cdot \frac{2a}{3(a+3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a(a+3)}{a(a+3)} = \frac{2}{3}$.
Vastaus: a) $x = -\frac{1}{7}$, b) mediaani 3, keskiarvo 4, c) $\frac{2}{3}$.
3. a) Jos rinteeseen pituus on x metriä, on $\frac{180}{x} = \sin 7^\circ$, josta $x = \frac{180}{\sin 7^\circ} \approx 1476,99$.
Hiihtohissin nopeus on $6 \text{ km/h} = 100 \text{ m/min}$. Hiihtohissillä matka kestää $\frac{x}{100} \text{ min} \approx 14 \text{ min } 46 \text{ s}$.
b) Suoran suuntakulmalle α pätee: $\tan \alpha = \frac{3-0}{3-1} = \frac{3}{2}$. Tästä saadaan $\alpha \approx 56,310^\circ$.
Vastaus: a) Rinne 1480 m, hissimatka kestää 14 min 50 s. b) $56,3^\circ$.
4. Kumiputken sisäsäde on $\frac{53}{2} - 4 \text{ mm} = 22,5 \text{ mm} = 2,25 \text{ cm}$. Jos putken pituus on x cm, on $\pi 2,25^2 x = 3000$, josta $x = \frac{3000}{\pi 2,25^2} \approx 188,628$.
Vastaus: 189 cm.
5. Jos x on puheaika minuutteina, kuukausilasku on A liittymässä $4 + 0,09x$ (euroa) ja B liittymässä $0,12x$ (euroa). Kun laskut ovat yhtäsuuret, on $4 + 0,09x = 0,12x$, josta $x = \frac{4}{0,03} = 133\frac{1}{3} \text{ (min)} = 2 \text{ h } 13 \text{ min } 20 \text{ s}$.
6. Jos äänen intensiteetti oli aluksi x ja sitten y , oli $\frac{y}{x} = \left(\frac{50}{15}\right)^2 = \frac{100}{9}$. Kysytylle prosenttiluvulle p pätee $1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{9}$, josta $p = 1011\frac{1}{9}$.
Vastaus: Intensiteetti kasvoi 1010 %.
7. Alaspäin aukeavan paraabelin $h(t) = -0,15t^2 + 2,4t + 1,8$ ylin piste löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivaatta $h'(t) = -0,30t + 2,4$ häviää, kun $t = \frac{2,4}{0,3} = 8$. Korkein piste on $h(8) = -0,15 \cdot 8^2 + 2,4 \cdot 8 + 1,8 = 11,4 \text{ (m)}$. Lentorata laskee korkeimman pisteen jälkeen kunnes $h(t) = 0$ eli $-0,15t^2 + 2,4t + 1,8 = 0$. Näin on, kun $t = \frac{-2,4 \pm \sqrt{5,76 + 1,08}}{-0,30} \approx \frac{2,4 \pm 2,61534}{0,3} = 16,7178 \text{ (s)}$. Negatiivinen arvo hylättiin, koska on oltava $t > 0$.
Vastaus: Pallo käy 11,4 m korkeudessa. Lentorata laskee aikavälillä 8 s - 16,7 s.

8. Viiden mustan pallon todennäköisyys $P_M = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{143} \approx 0,083916$. Ainakin yhden punaisen pallon todennäköisyys on tämän komplementtitapaus eli on $1 - P_M = \frac{131}{143} \approx 0,916084$.

Viiden punaisen pallon todennäköisyys $P_P = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{3003} \approx 0,000333$. Viiden samanvärisen pallon todennäköisyys on $P_M + P_P = \frac{253}{3003} \approx 0,084249$.

Vastaus: Ainakin yksi on punainen todennäköisyydellä 0,9161. Kaikki ovat samanvärisiä todennäköisyydellä 0,0842.

9. Olkoot hotellikustannukset $100h$ ja matkakustannukset $100m$. Muutosten jälkeen hotellikustannukset ovat $95h$ ja matkakustannukset $118m$. Paketin hinnan samuudesta saadaan yhtälö $95h + 118m = 100h + 100m$, josta seuraa $h = \frac{18}{5}m$. Kysytty prosenttiluku on $100 \cdot \frac{100m}{100h + 100m} = \frac{100m}{\frac{18}{5}m + m} = \frac{500}{23} \approx 21,7391$.

Vastaus: 21,7 %.

10. Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ derivaatta on $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ehdosta $f(0) = -2$ seuraa, että $d = -2$ ja ehdosta $f'(0) = 0$, että $c = 0$. Funktio on nyt $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2$ ja derivaatta $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Ehdosta $f'(2) = 0$ saadaan yhtälö $12a + 4b = 0$ ja ehdosta $f(2) = 1$ yhtälö $8a + 4b = 3$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $4a = -3$ eli $a = -\frac{3}{4}$ ja edelleen $b = -3a = \frac{9}{4}$.

Vastaus: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$, $d = -2$.

11. Korkotekijä on $q = 1 + 0,01p = 1,0175$, kun korko $p = 1,750$. Talletuksen alkamisen jälkeen tilillä on rahaa ensimmäisen vuoden lopussa $700q$ euroa, toisen vuoden lopussa $700(q + q^2)$ euroa, kolmannen vuoden lopussa $700(q + q^2 + q^3)$ euroa ja yleisesti n :nen vuoden lopussa $700(q + q^2 + \dots + q^n)$ euroa eli $S_n = 700q \frac{1 - q^n}{1 - q}$ euroa. Vuonna

2010 on $n = 5$ ja $S_5 = 700 \cdot 1,0175 \cdot \frac{1,0175^5 - 1}{0,0175} \approx 3688,094$ (euroa). Jälkimmäisen

kysymyksen vastaus saadaan yhtälöstä $S_n = 700 \cdot 1,0175 \cdot \frac{1,0175^n - 1}{0,0175} = 12\,000$ eli

$1,0175^n = \frac{120}{7} \cdot \frac{0,0175}{1,0175} + 1$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \approx \frac{\ln 1,294840}{\ln 1,0175} \approx 14,89$.

Vuosia kuluu siis 15, jolloin ollaan vuoden 2020 lopussa.

Vastaus: Vuoden 2010 lopussa rahaa on 3688,09 euroa ja vuoden 2020 lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa.

12. Jos lieriön pohjan säde on r ja kuution särmä x , on lieriössä olevan vesimäärän tilavuus $f(x) = \pi r^2 x - x^3$. Tämän derivaatta $f'(x) = \pi r^2 - 3x^2$. Derivaatta häviää, kun $3x^2 = \pi r^2$ eli ($x > 0$) kun $x = r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. Koska $f'(x) > 0$, kun $0 < x < r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ja $f'(x) < 0$, kun $x > r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, antaa derivaatan nollakohta funktion suurimman arvon. Arvolla $r = 1,75$ m on $r\sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1,791$ m.

Vastaus: Veden syvyys on 1,8 m.

13. Funktio $f(x) = x^3 - 2x$ on kuutioparaabeli, joka leikkaa x -akselia, kun $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{2}$. Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$, kun $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, joten $f(x)$:llä on lokaali maksimi $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,09$ pisteessä $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja lokaali minimi $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -1,09$ pisteessä $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Funktio $g(x) = -x + 3$ on laskeva suora, joka kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(3, 0)$ kautta. Erityisesti $f(\sqrt{2}) < g(\sqrt{2})$, $f(3) > g(3)$ ja $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) < g(-\sqrt{\frac{2}{3}})$. Yhtälöllä $f(x) = g(x)$ eli $h(x) = 0$, missä $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x - 3$, on funktioiden kulun perusteella tasan yksi juuri x_0 , $\sqrt{2} < x_0 < 3$. Haarukoimalla saadaan $h(1,6) \approx -0,50 < 0$ ja $h(1,7) \approx 0,21 > 0$ sekä $h(1,65) \approx -0,16 < 0$. Tämän perusteella $1,65 < x_0 < 1,7$, joten yhden desimaalin tarkkuudella juuri $x_0 = 1,7$.

14. Ennen 1.1.2005 oli lähdeverotettu korko $p_1 = 0,71 \cdot 1,5 = 1,065$ ja korkotekijä $q_1 = 1 + 0,01p_1 = 1,01065$. 1.1.2005 jälkeen oli lähdeverotettu korko $p_2 = 0,72 \cdot 1,5 = 1,08$ ja korkotekijä $q_2 = 1 + 0,01p_2 = 1,0108$. Liisan 1000 euron talletus oli korkoineen 1.1.2005 $1000q_1^3$ ja kaksi vuotta myöhemmin eli viisi vuotta talletuksen alusta $1000q_2^2q_1^3 \approx 1054,709$ euroa. Talletuksen reaaliarvon muutoskerroin on $\frac{1548}{1632}q_2^2q_1^3 \approx 1,000423$, joten reaaliarvo on kasvanut 0,0423 %.

Vastaus: Talletus on korkoineen 1054,71 euroa. Sen reaaliarvo on kasvanut 0,0423 %.

15. A) Todennäköisyys, että lukion opiskelija opiskelee espanjaa on $p = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$. Todennäköisyys, että ryhmästä n opiskelee espanjaa on $P_n = \binom{32}{n}p^n(1-p)^{32-n}$.

Todennäköisyys, että ryhmästä 12 opiskelee espanjaa on $P_{12} \approx 0,01066$.

Todennäköisyys, että ryhmästä korkeintaan kolme opiskelee espanjaa on vastaavasti $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0,09309$.

Approksimoidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla. Nyt $n = 32$ ja $p = \frac{1}{5}$, joten keskiarvo $\mu = np = 6,4$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 2,2627$. Normaalijakauma on siis $N(6,4; 2,2627)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0, 1)$ muunnoksella $z = \frac{x - 6,4}{2,2627}$, $z_0 = \frac{12,5 - 6,4}{2,2627} \approx 2,70$. Kysytty todennäköisyys on $1 - \Phi(z_0) = 0,0035$ eli 0,35 %.

15. B) Suunnikkaan paikkavektorit ovat $\overline{OA} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$, $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = (-3 + 3)\vec{i} + (7 + 2)\vec{j} = 9\vec{j}$, $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{AD} = \vec{i} + (9 + 5)\vec{j} = \vec{i} + 14\vec{j}$, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = (-3 + 1)\vec{i} + (7 + 5)\vec{j} = -2\vec{i} + 12\vec{j}$.

Lävistäjävektori $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$ ja $|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$. Lävistäjävektori $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $|\overline{DB}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Lävistäjävektorien väliselle kulmalle α saadaan $\cos \alpha = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{|\overline{AC}||\overline{DB}|} = \frac{8 - 21}{\sqrt{65}\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \approx -0,447214$.

Tästä saadaan $\alpha \approx 116,6^\circ$.