



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

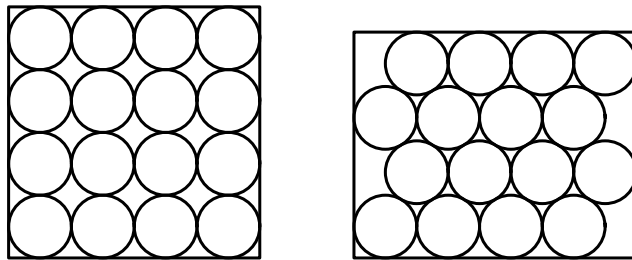
1. a) Ratkaise yhtälö  $2x^2 = x + 1$ .  
b) Ratkaise yhtälö  $\frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{5}{12}$ .  
c) Olkoon  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  ja  $y = \frac{2t}{1+t^2}$ , missä  $t$  on reaaliluku. Sievennä lauseke  $x^2 + y^2$ .
2. a) Määritä suorien  $2x + y = 8$ ,  $3x + 2y = 5$  leikkauspiste.  
b) Ratkaise yhtälö  $5^{5x-5} = 125$ .  
c) Ratkaise yhtälö  $|3x - 2| = 5$ .
3. a) Määritä derivaatta ja integraalifunktio funktioille  $x^n$ , kun  $n = -4, -1, 2$ .  
b) Laske funktion  $f(x) = \frac{2 + \sin x}{2 + \cos x}$  derivaatta pisteessä  $x = \frac{\pi}{2}$ .
4. Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 prosentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin, kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan prosentteina verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa.
5. CD-levyllä on viisi kappaletta, ja henkilö kuuntelee levyn päivittäin yhden viikon aikana siten, että hän asettaa soittimen toistamaan kappaleet satunnaisessa järjestyksessä. Millä todennäköisyydellä kappaleet tulevat ainakin kerran kuunnelluiksi siinä järjestyksessä, jossa ne ovat levyllä?
6. Määritä parametri  $t$  siten, että vektorit  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$  ja  $\vec{b} = 3\vec{i} + t\vec{j}$  ovat yhdensuuntaiset. Millä parametrin arvolla vektorit ovat kohtisuorat?
7. a) Laske paraabelien  $y = x^2 - 3$  ja  $y = -x^2 + 2x + 1$  leikkauspisteiden koordinaatit.  
b) Laske sen rajoitetun alueen pinta-ala, joka jää paraabelien väliin.
8. Kolmion  $ABC$  pinta-ala on  $6 \text{ cm}^2$ . Sivun  $AB$  pituus on  $5 \text{ cm}$  ja sivun  $AC$  pituus  $4 \text{ cm}$ . Määritä kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
9. Määritä funktion  $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ , suurin ja pienin arvo. Piirrä funktion kuvaaja.
10. Millä vakion  $a$  arvoilla funktio  $f(x) = e^x - a|x - 1|$  on kaikkialla kasvava?
11. a) Määritä lukujen 154 ja 126 suurin yhteinen tekijä. b) Ratkaise Diofantoksen yhtälö  $154x + 126y = 56$ .

KÄÄNNÄ!

- 12.** Osoita, että funktiolla  $f(x) = x^2 - 2^x$  on nollakohta välillä  $[-1, 1]$ , ja laske sille nelidesimaalinen likiarvo. Ratkaisusta tulee ilmetä, millä tavoin tulokseen on päädytty.
- 13.** Olkoot  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivoituvia funktioita, joille pätee  $f(x) \leq g(x)$  kaikilla  $x$ . Tutki, ovatko seuraavat väitteet oikeita vai vääriä joko osoittamalla väite oikeaksi tai esittämällä sille vastaesimerkki (so. funktiot  $f$  ja  $g$ , joille väite ei päde):

a)  $f'(x) \leq g'(x)$  kaikilla  $x$ ;      b)  $\int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x g(t) dt$  kaikilla  $x \geq 0$ .

- ★**14.** Olkoon  $f(x) = \cos x - \sin x$ .
- a) Laske funktion  $f$  nollakohdat välillä  $[0, 2\pi]$ . (2 p.)
- b) Millä muuttujan  $x$  arvoilla funktio  $f$  saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä  $[0, 2\pi]$ ? (2 p.)
- c) Laske  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ . (2 p.)
- d) Laske  $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$ . (3 p.)
- ★**15.** Viinipullon pohjan säde on  $r$ . Suorakulmaiseen laatikkoon pakataan  $n^2$  viinipulloa rinnakkain  $n$  riviin, jolloin jokaisessa rivissä on  $n$  pulloa. Pakkaaminen tehdään jommallakummalla seuraavien kuvien esittämistä tavoista (kuvissa on  $n = 4$ ):



- a) Laske, mikä on laatikoiden täyttösuhde, so. viinipullojen pohjien yhteispinta-alan suhde tarvittavan laatikon pohjapinta-alaan kummassakin tapauksessa. Laske kummankin täyttösuhteen numeerinen arvo kahden desimaalin tarkkuudella, kun  $n = 10$ . (4 p.)
- b) Miten täyttösuhteet käyttäytyvät, kun viinilaatikko tulee äärettömän suureksi, ts.  $n \rightarrow \infty$ ? (5 p.)