Pitkä matematiikka 12.3.2008, ratkaisut:

1. **a)** $2x^2 = x+1 \iff 2x^2 - x - 1 = 0$. Ratkaisu on $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$. Siis $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{2}$.

b) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{5}{12} \iff 2x - 4(x-2) = 5 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$.

c) $x^2 + y^2 = \dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1+t^4+2t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$.

2. **a)** On ratkaistava yhtälöpari $2x + y = 8,\ 3x + 2y = 5$. Kertomalla ensimmäinen kahdella ja vähentämällä toisesta saadaan $x = 11$, jolloin $y = 8 - 2x = -14$.

b) $5^{5x-5} = 125 \iff 5^{5x-5} = 5^3 \iff 5x - 5 = 3 \iff x = \frac{8}{5}$.

c) $|3x-2| = 5 \iff 3x - 2 = \pm 5$ eli $x = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$ tai $x = \frac{2-5}{3} = -1$.

3. **a)** $Dx^{-4} = -4x^{-5}$, $Dx^{-1} = -x^{-2}$, $Dx^2 = 2x$.

$\int x^{-4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + C$, $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$, $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

b) $f'(x) = \dfrac{(2+\cos x)\cos x + (2+\sin x)\sin x}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{2(\sin x + \cos x) + 1}{(2+\cos x)^2}$.

$f'(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{2(1+0)+1}{(2+0)^2} = \dfrac{3}{4}$.

4. Jos alkuperäinen maksu oli a ja veroton hinta h, on $1{,}22h = a$. Siis $h = \frac{1}{1{,}22}a$. Jos arvonlisävero on 8 %, parturimaksuksi tulee $1{,}08h = \frac{1{,}08}{1{,}22}a$. Parturimaksun alennus on prosenteissa $100 \cdot \dfrac{a - \frac{1{,}08}{1{,}22}a}{a} = 100(1 - \frac{1{,}08}{1{,}22}) \approx 11{,}4754$.

Vastaus: 11,5 %.

5. Kappaleet voidaan järjestää $5! = 120$ eri järjestykseen. Väärän järjestyksen todennäköisyys on $\frac{119}{120}$. Todennäköisyys sille, että joka kerta on väärä järjestys on $(\frac{119}{120})^7$. Oikea järjestys tulee ainakin kerran todennäköisyydellä $1 - (\frac{119}{120})^7 \approx 0{,}056895$.

Vastaus: 5,69 % todennäköisyydellä.

6. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku u siten, että $\overline{b} = u\overline{a}$ eli jos $u(5\overline{i} - 2\overline{j}) = 3\overline{i} + t\overline{j}$ eli jos $5u = 3$ ja $t = -2u$. On oltava $u = \frac{3}{5}$ ja $t = -2 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6}{5}$.

Vektorit ovat kohtisuorat, jos $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ eli jos $15 - 2t = 0$. Näin on, kun $t = \frac{15}{2}$.

Vastaus: Yhdensuuntaiset, kun $t = -\frac{6}{5}$ ja kohtisuorat, kun $t = \frac{15}{2}$.

7. **a)** Leikkauspisteiden x-koordinaatit saadaan yhtälöstä $x^2 - 3 = -x^2 + 2x + 1$ eli $x^2 - x - 2 = 0$. Sen ratkaisut ovat $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ eli $x = 2$ ja $x = -1$. Vastaavat y-koordinaattien arvot ovat $y = 2^2 - 3 = 1$ ja $y = (-1)^2 - 3 = -2$. Leikkauspisteet ovat $(2,1)$ ja $(-1,-2)$.

b) Väliin jäävän alueen ala on $\int_{-1}^{2}(-x^2 + 2x + 1 - x^2 + 3)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx$

$= \Big/_{-1}^{2} -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x = -\frac{2}{3} \cdot 8 + 4 + 8 - (\frac{2}{3} + 1 - 4) = 9$.

Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(2,1)$ ja $(-1,-2)$. Pinta-ala on 9.

8. Kolmion pinta-ala $a = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha$, missä $\alpha = \angle(AB,\, AC)$. Siis $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin\alpha = 6$, josta $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Joko $\alpha \approx 36{,}870^{\circ}$ tai $\alpha \approx 180^{\circ} - 36{,}870^{\circ} = 143{,}130^{\circ}$. Jälkimmäisessä tapauksessa α on kolmion suurin kulma. Edellisessä tapauksessa on tarkistettava vielä kolmion muut kulmat. Tällöin $\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$. Kolmion kolmannen sivun pituus saadaan kosinilauseesta: $BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 9$, joten $BC = 3$. Koska $3^2 + 4^2 = 5^2$, on tämä kolmio suorakulmainen, jolloin sen suurin kulma on 90°.

Vastaus: Kolmion suurin kulma on joko $90{,}0^{\circ}$ tai $143{,}1^{\circ}$.

9. Funktio $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ on määritelty, kun $-3 \leq x \leq 3$. Derivaatta on $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{9 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2} - x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Derivaatta häviää, kun $\sqrt{9 - x^2} = x$ eli kun $x \geq 0$ ja $x^2 = 9 - x^2$ eli kun $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12$. Koska $-3 < \frac{3}{\sqrt{2}} < 3$, suurin ja pienin arvo löytyvät joukosta $f(-3) = -3$, $f(\frac{3}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$, $f(3) = 3$. Derivaatan merkistä nähdään, että funktio on kasvava, kun $-3 \leq x \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$ ja vähenevä, kun $\frac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq 3$.

Vastaus: Pienin arvo on -3 ja suurin arvo $3\sqrt{2}$.

10. Funktio $f(x) = e^x - a|x - 1|$ on jatkuva kaikkialla. Alueessa $x > 1$ on $f(x) = e^x - a(x - 1)$ ja $f'(x) = e^x - a$. Nyt $f'(x) \geq 0$, kun $e^x \geq a$. Alueessa $x > 1$ on $e^x > e$ ja $\lim_{x \to 1} e^x = e$. Siten $f'(x) \geq 0$ eli f on kasvava alueessa $x > 1$, kun $a \leq e$.

Alueessa $x < 1$ on $f(x) = e^x + a(x - 1)$ ja $f'(x) = e^x + a$. Nyt $f'(x) \geq 0$, kun $e^x \geq -a$. Alueessa $x < 1$ on $e^x > 0$ ja $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. Siten $f'(x) \geq 0$ eli f on kasvava alueessa $x < 1$, kun $-a \leq 0$ eli $a \geq 0$.

Jatkuva funktio, joka on kasvava alueessa $x < 1$ ja alueessa $x > 1$ on kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä. Näin ollen $f(x)$ on kasvava kaikkialla, kun $0 \leq a \leq e$.

11. **a)** Eukleiden algoritmi antaa: $154 = 126 + 28$, $126 = 4 \cdot 28 + 14$, $28 = 2 \cdot 14$. Näin ollen syt(156,126)=14.

b) Koska syt(156,126)=14 ja $56 = 4 \cdot 14$, Diofantoksen yhtälöllä on ratkaisu. Eukleiden algoritmi antaa: $14 = 126 - 4 \cdot 28 = 126 - 4 \cdot (154 - 126) = -4 \cdot 154 + 5 \cdot 126$, joten $56 = 4 \cdot 14 = -16 \cdot 154 + 20 \cdot 126$. Diofantoksen yhtälön eräs ratkaisu on siten $x_0 = -16$, $y_0 = 20$. Yhtälön yleinen ratkaisu on $(x, y) = (-16 + n \cdot \frac{126}{14},\ 20 - n \cdot \frac{154}{14})$ $= (-16 + 9n,\, 20 - 11n)$, $n \in Z$ eli $(2 + 9n,\, -2 - 11n)$, $n \in Z$.

12. Funktio $f(x) = x^2 - 2^x$ on jatkuva välillä $[-1, 1]$, $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$ ja $f(0) = -1 < 0$, joten f:llä on nollakohta välillä $[-1, 0] \in [-1, 1]$. Haetaan sille likiarvo Newtonin menetelmällä $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, missä $f(x) = x^2 - 2^x$ ja $f'(x) = 2x - 2^x \ln 2$. Alkuarvolla $x_0 = -0{,}5$ saadaan $x_1 \approx -0{,}806757$, $x_2 \approx -0{,}767354$, $x_3 \approx -0{,}766665$, $x_4 \approx -0{,}766665$. Nelidesimaalinen likiarvo on siten $-0{,}7667$.

13. **a)** Väite on väärä. Valitaan $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = 0$, jolloin $f'(x) = -2x$ ja $g'(x) = 0$. Nyt $f(x) \leq g(x)$ kaikilla x. Kun $x < 0$, on $f'(x) = -2x > 0 = g'(x)$.

b) Väite on oikea. Jos $f(x) \leq g(x)$ aina, on $g(x) - f(x) \geq 0$ aina. Tällöin on myös $\int_0^x (g(t) - f(t))dt \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$ eli $\int_0^x g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$ eli väite.

***14.** **a)** Nollakohdat saadaan yhtälöstä $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \iff x = \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi$. Välille $[0, 2\pi]$ osuvat ratkaisut $x = \frac{\pi}{4}$ ja $x = \frac{5\pi}{4}$.

b) Funktion $f(x) = \cos x - \sin x$ derivaatta on $f'(x) = -\sin x - \cos x$. Koska $-\cos x = \cos(\pi - x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, $f'(x) = 0$, kun $\sin x = \sin(x - \frac{\pi}{2}) \iff x = \pi - x + \frac{\pi}{2} + 2n\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$. Välille $[0, 2\pi]$ osuvat ratkaisut $x = \frac{3\pi}{4}$ ja $x = \frac{7\pi}{4}$. Nyt $f(\frac{3\pi}{4}) = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx -1{,}41$ ja $f(\frac{7\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Lisäksi $f(0) = 1 = f(2\pi)$. Tästä nähdään, että funktio saa suurimman arvonsa, kun $x = \frac{7\pi}{4}$ ja pienimmän arvonsa, kun $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\cos x - \sin x)dx = \Big/_0^{2\pi} \sin x + \cos x = 1 - 1 = 0$.

d) $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\cos x - \sin x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)dx$

$= \Big/_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) - \Big/_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x + \cos x) + \Big/_{5\pi/4}^{2\pi} (\sin x + \cos x) =$

$2(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4}) = 2(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2}$.

***15.** **a)** 1) Vasemmanpuoleisen kuvan tapaus. Laatikon pohja on neliö, jonka sivun pituus on $2nr$. Pohjan ala on $a_L = 4n^2r^2$. Pullojen pohjien alojen summa on $a_P = n^2\pi r^2$. Täyttösuhde $S_n = \dfrac{a_P}{a_L} = \dfrac{n^2\pi r^2}{4n^2r^2} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}79$. Tulos on sama kaikilla arvoilla n.

2) Oikeanpuoleisen kuvan tapaus. Laatikon pohjan pitemmän sivun pituus $p = (2n+1)r$. Lyhyemmän sivun pituuden määrittämiseksi tarkastellaan ensin kuvan tapauksessa ympyräpyramidia, joka muodostuu neljästä pohjaympyrästä ja niiden päällä olevista kuudesta ympyrästä. Kun pyramidin kärkinä olevien ympyröiden keskipisteet yhdistetään saadaan tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on $(4-1) \cdot 2r$ ja korkeus $(4-1)r\sqrt{3}$. Tämän perusteella laatikon lyhyemmän sivun pituus arvolla $n = 4$ on $((4-1)\sqrt{3} + 2)r$. Samalla päättelyllä nähdään, että lyhyemmän sivun pituus arvolla n on $q = ((n-1)\sqrt{3} + 2)r$.

Laatikon pohjan ala $a_L = pq = (2n+1)((n-1)\sqrt{3} + 2)r^2$. Täyttösuhde on nyt $T_n = \dfrac{a_P}{a_L} = \dfrac{n^2\pi}{(2n+1)((n-1)\sqrt{3} + 2)}$. Arvolla $n = 10$ on $T_{10} = \dfrac{100\pi}{21(9\sqrt{3} + 2)} \approx 0{,}85$.

b) Vasemmanpuoleisen laatikon täyttösuhde ei riipu arvosta n, joten se on n:n kasvaessa rajatta edelleen $\frac{\pi}{4}$. Oikeanpuoleisen laatikon tapauksessa on raja-arvo $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2\sqrt{3} + (4-\sqrt{3})/n + (2-\sqrt{3})/n^2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}91$.