

Matematiikan ylioppilaskoe 20.3.2009

Pitkä oppimäärä

Vastaukset

1. a) $\frac{2}{9}a^2$; b) $x < \frac{5}{3}$; c) $x = \frac{3}{13}, y = \frac{24}{13}$.
2. a) $\frac{3}{4}$; b) $x_1 = 0, x_2 = 3$; c) $-\sin 2x$.
3. a) $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, yksikkövektori $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$;
b) 11.1 %.
4. $x = -1$.
5. a) $x = 20$;
b) $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ tai $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$, mistä seuraa monotonisuus.
6. a) 2.5 %; b) 16 %.
7. $x_0 = \frac{2}{3}$.
8. $12x + 9y + 2z - 36 = 0$.
9. $x = \frac{\pi}{3} + n\pi, y = (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}, n \in \mathbb{Z}$; ala = 2.
10. $V(a) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}); V_\infty = \frac{\pi}{2}; a = \ln 10 \approx 2.3$.
11. $\frac{9n^2 + 117n + 34}{3n + 5} = 3n + 34 - \frac{136}{3n + 5}$,
viimeinen termi supistuu kokonaisluvuksi, jos $n = 1, 4$ tai 21 .
12. $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 2}{3x_n^2 - 1}$; jos $x_0 = 1.5$, niin $x_2 \approx 1.52$;
 $f(x) = x^3 - x - 2, f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, ei siis muita juuria.
13. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$; suppenee, jos on olemassa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$;
koska $S_i > a_1$ kaikilla i , on $\sum_{i=1}^n S_i > na_1$ eikä sarja suppene.
14. a) $h = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})a$; b) $V = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{3})a^3$; c) 70° .
15. a) $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x) dx \geq \int_0^x 2 dx = 2x$;
b) $1 = \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 [f(0) + 2x] dx = f(0) + 1$;
c) koska $\int_0^1 f(x) dx > 0$ on olemassa $x_0 < 1$ siten, että $f(x_0) > 0$, jolloin välillä $[0, x_0]$ on nollakohta; koska $f'(x) > 0$, muita ei ole.