



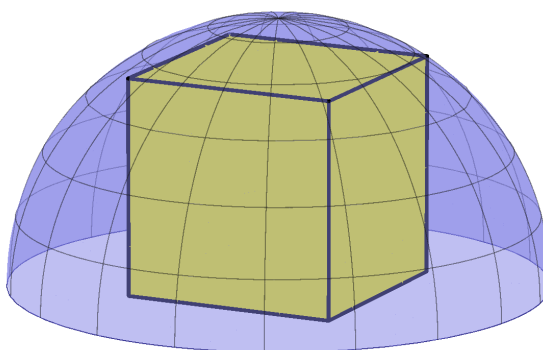
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1.
 - a) Ratkaise yhtälö $7x^7 + 6x^6 = 0$.
 - b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$.
 - c) Millä x :n arvoilla pätee $\frac{3}{3 - 2x} < 0$?

2.
 - a) Laske integraali $\int_0^1 (e^x + 1) dx$.
 - b) Derivoi funktio $x \sin x$.
 - c) Minkä luvun 2-kantainen logaritmi on 5?

3.
 - a) Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 4 ja 5. Laske kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
 - b) Määritä toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimet p ja q , kun yhtälön juuret ovat $-2 - \sqrt{6}$ ja $-2 + \sqrt{6}$.

4. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



5. Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} summa on vektori $4\vec{i} + \vec{j}$ ja niiden pistetulo on $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. Vektori \vec{b} on yhdensuuntainen vektorin \vec{i} kanssa. Määritä vektorit \vec{a} ja \vec{b} .

6. a) Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat eriväriset?

b) Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenään eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa?

7. Suorakulmion kaksi kärkeä on x -akselilla ja kaksi käyrällä

$$y = \frac{4}{2 + x^2}.$$

Mitkä ovat suorakulmion sivujen pituudet, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen?

8. Tietunnelin poikkileikkaus on osa alaspäin aukeavaa paraabelia. Tien leveys on 10 m, ja tunnelin poikkileikkauksen pinta-ala on $25,0 \text{ m}^2$. Määritä tunnelin korkeus senttimetrin tarkkuudella.

9. Tutki, kuinka monta juurta yhtälöllä

$$3 \tan x - 1 = 4x$$

on välillä $]-\pi/2, \pi/2[$.

10. Kolmio K_1 on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on a ja korkeus b . Kolmio K_2 on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat a ja b . Kummalla kolmiolla on pidempi piiri?

11. Määritä ne geometriset sarjat, joiden summa on 2 ja toinen termi on $\frac{3}{8}$. Anna vastauksena sarjan ensimmäinen termi ja sarjan suhdeluku.

12. Osoita, että muotoa $p^2 - 1$ oleva luku on jaollinen luvulla 12, kun p on alkuluku ja suurempi kuin 3.

13. Funktion f kuvaajan kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Laske funktion $\ln x$ kuvaajan kaarenpituus välillä $[1, 2]$ puolisuunnikasäännöllä jakamalla väli neljään osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

★**14.** Tarkastellaan lukujonoa $a_1 = \frac{9}{10}$, $a_2 = \frac{99}{100}$, $a_3 = \frac{999}{1000}$, \dots

- Määritä luvun a_n lauseke indeksin n avulla lausuttuna. (2 p.)
- Osoita, että lukujono on kasvava ja että $a_n < 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ (3 p.)
- Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (2 p.)
- Mikä luku on päättymätön desimaalikehitelmä $0,999\dots$? (2 p.)

★**15.** Funktio $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = 2^{1-n} \sin x, \quad \text{kun } x \in [(n-1)\pi, n\pi[, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Piirrä funktion kuvaaja, kun $x \in [0, 3\pi]$. (2 p.)
- Laske $\int_0^{3\pi} f(x) dx$. (2 p.)
- Laske $\int_0^{n\pi} f(x) dx$. (3 p.)
- Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} f(x) dx$. (2 p.)