

## Lyhyt matematiikka 23.3.2011, ratkaisut:

1. a)  $4x + (5x - 4) = 12 + 3x \iff 9x - 4 = 12 + 3x \iff 6x = 16 \iff x = \frac{8}{3}$ .  
b)  $x^2 + x - (x^2 - x) = x^2 + x - x^2 + x = 2x$ . Kun  $x = \frac{1}{2}$ , on  $2x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ .  
c) Vähentämällä yhtälöparin  $x - 2y = 0$ ,  $x - 3y = 1$  yhtälöt toisistaan saadaan  $y = -1$ , josta  $x = 2y = -2$ .  
*Vastaus:* a)  $x = \frac{8}{3}$ , b) Lauseke on  $2x$  ja sen arvo 1, c)  $x = -2$ ,  $y = -1$ .
2. a) Annettujen sivujen väliselle kulmalle  $\alpha$  pätee  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ , josta  $\alpha \approx 66,42^\circ$ . Toinen terävä kulma on  $90^\circ - \alpha \approx 23,58^\circ$ .  
b)  $(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x} = x - 2\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} = x + 1$ .  
c) Kun  $x = 2$  ja  $y = 5$ , on  $|x - y| = |2 - 5| = |-3| = 3$ .  
*Vastaus:* a)  $66^\circ$  ja  $24^\circ$ . b)  $x + 1$ , c) 3.
3. a) Kun  $x = 2$ , on  $x^2 - 4ax + 4a^2 = 4 - 8a + 4a^2 = 4(a - 1)^2$ . Tämä on nolla, kun  $a = 1$ .  
b) Luvusta  $a$  tulee ensin  $1,2a$  ja sitten  $(1 - 0,17)1,2a$  eli  $0,996a$  eli  $(1 - 0,004)a$ , joten luku on pienentynyt  $0,4\%$ .  
*Vastaus:* a)  $a = 1$ , b) Tulos on  $0,4\%$  pienempi kuin  $a$ .
4. a) Vastaavan neliön sivun pituus on  $\frac{8}{9} \cdot 5 = \frac{40}{9}$ . Ympyrän pinta-alalle saadaan arvo  $A_E = \left(\frac{40}{9}\right)^2 = \frac{1600}{81} \approx 19,753086$ .  
b) Ympyrän todellinen pinta-ala on  $A = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi \approx 19,634954$ . Egyptiläisten arvo on siten liian suuri. Virhe on prosentteina  $100 \cdot \frac{A_E - A}{A} \approx 0,6016$ .  
*Vastaus:* a)  $\frac{1600}{81}$ , b)  $0,6$  prosenttia liian suuri.
5. Eräs likiarvo derivaatalle on  $f'(0) \approx \frac{f(0,1) - f(0)}{0,1 - 0} = \frac{10,51 - 10,00}{0,1} = 5,1$ .
6. Sivujen mittakaava on pinta-alan mittakaavan neliöjuuri. Jos siis pinta-ala muuttuu suhteessa  $1:2$ , niin sivut muuttuvat suhteessa  $1:\sqrt{2}$ . Uuden kartan mittakaava on  $1:(\sqrt{2} \cdot 20\,000)$  eli noin  $1:28\,284$ .  
*Vastaus:*  $1:28\,300$ .
7. Jos arvosanan  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, 6$  prosenttiosuus on  $a_n$ , on arvosanojen keskiarvo  $\bar{x} = 0,01 \sum_{n=0}^6 n \cdot a_n = 3,1037$ .  
Arvosanojen keskihajonta on  $s_n = \sqrt{0,01 \sum_{n=0}^6 a_n (n - \bar{x})^2} \approx 1,5609$ .  
*Vastaus:* Keskiarvo on  $3,10$  ja keskihajonta  $1,56$ .

8. a) Kussakin ruudussa on kaksi väri vaihtoehtoa, joten yhdeksässä ruudussa on  $2^9 = 512$  eri vaihtoehtoa. Yhden värikombinaation todennäköisyys on  $\frac{1}{512} \approx 0,001953$ .

b) Kolmen ruudun rivissä on  $2^3 = 8$  väri vaihtoehtoa, joista kuusi ei ole yksiväristä. Todennäköisyys sille, että vaakarivi ei ole yksivärinen on  $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ . Todennäköisyys sille, että mikään kolmesta vaakarivistä ei ole yksivärinen, on  $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64} = 0,4218785$ .

Vastaus: a)  $\frac{1}{512}$ , b)  $\frac{27}{64}$ .

9.  $f'(x) = D(-x^3 + x + 2) = -3x^2 + 1$  ja  $g'(x) = D(x^3 - x - 2) = 3x^2 - 1$ . Nyt  $f'(x) > g'(x) \iff -3x^2 + 1 > 3x^2 - 1 \iff 6x^2 < 2 \iff x^2 < \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Vastaus:  $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

10. Suorakulmion ylemmät kärjet ovat pisteissä  $(\pm a, 4 - a^2)$ . Suorakulmion pinta-ala on  $f(a) = 2a(4 - a^2) = 8a - 2a^3$ . Sen derivaatta  $f'(a) = 8 - 6a^2$  häviää, kun  $a^2 = \frac{4}{3}$  eli, koska  $a > 0$ , kun  $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1547$ . Selvästi  $f'(a) > 0$ , kun  $0 < a < \frac{2}{\sqrt{3}}$  ja  $f'(a) < 0$ , kun  $\frac{2}{\sqrt{3}} < a < 2$ . Näin ollen pinta-ala saa suurimman arvonsa kohdassa  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Vastaus: Arvolla  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

11. Jos  $q$  on radioaktiivisuuden vuorokautinen vähenemiskerroin, on  $25q^5 = 16,2$ , josta  $q = \sqrt[5]{\frac{16,2}{25}} \approx 0,91688528$ . Puoliintumisajalle  $n$  vrk saadaan yhtälö  $q^n = 0,5$ , josta  $n \ln q = \ln 0,5 \iff n = \frac{\ln 0,5}{\ln q} \approx 7,9880590$ .

Kymmenen vuorokautta aiempi radioaktiivisuus  $x$  kBq toteuttaa yhtälön  $xq^{10} = 25,0$ , joten  $x = \frac{25}{q^{10}} \approx 59,537418$ .

Vastaus: Puoliintumisaika on 8 vrk. Kymmenen vuorokautta aiemmin radioaktiivisuus oli 59,5 kBq.

12. Vaihdetaan laskua varten  $x$ - ja  $y$ -akselit keskenään. Tässä uudessa koordinaatistossa  $A = (x_A, y_A) = (2\,549\,572, 6\,670\,801)$  ja  $B = (x_B, y_B) = (2\,554\,955, 6\,670\,015)$ . Jos havaittu trombi sijaitsee pisteessä  $P = (x, y)$ , on pisteiden  $A$  ja  $P$  kautta kulkevan suoran suuntakulma  $-(133,8^\circ - 90^\circ) = -43,8^\circ$  ja kulmakerroin  $k_A = \tan(-43,8^\circ) \approx -0,958965522$ . Vastaavasti pisteiden  $B$  ja  $P$  kautta kulkevan suoran suuntakulma on  $360^\circ - 205^\circ - 90^\circ = 65^\circ$  ja kulmakerroin  $k_B = \tan 65^\circ \approx 2,144506922$ . Suoran  $AP$  yhtälö on  $y - y_A = k_A(x - x_A)$  ja suoran  $BP$  yhtälö  $y - y_B = k_B(x - x_B)$ . Vähentämällä yhtälöt toisistaan ja sieventämällä saadaan leikkauspisteen  $P$   $x$ -koordinaatiksi  $x_P = \frac{y_A - y_B - k_A x_A + k_B x_B}{k_B - k_A} \approx 2\,553\,545$  ja tästä edelleen pisteen  $P$   $y$ -koordinaatiksi  $y_P = y_A + k_A(x_P - x_A) \approx 6\,666\,991$ . Vaihtamalla  $x$ - ja  $y$ -koordinaatit saadaan trombin sijainti alkuperäisessä koordinaatistossa.

Vastaus:  $(6\,666\,991, 2\,553\,545)$ .

- 13.** Aritmeettisessa jonossa peräkkäisten termien erotus on aina  $d = 12 - 10 = 2$ , joten jonon  $n$ . termi on  $a_n = 10 + 2(n - 1) = 8 + 2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Geometrisen jonon  $n$ . termi on  $b_n = 2\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . On määrättävä pienin luku  $n$ , jolle  $b_n > a_n$  eli  $2\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} > 8 + 2n \iff 1,05^{n-1} - n - 4 > 0$ .

Koska arvolla  $n = 95$  on  $1,05^{94} - 95 - 4 < -0,8717 < 0$  ja arvolla  $n = 96$  on  $1,05^{95} - 96 - 4 > 3,0346 > 0$ , pienin luku  $n = 96$ .

*Vastaus:* 96. termistä lähtien.

- 14. a)** Pääoman tuotto on  $0,054 \cdot 1,8 \cdot 10^6 = 97\,200$  euroa. Tuotosta siirretään pääomaan  $0,30 \cdot 97\,200 = 29\,160$  euroa ja jaetaan  $42\,000$  euroa opiskelustipendeinä. Neljään-toista matkastipendiin jää  $97\,200 - 29\,160 - 42\,000 = 26\,040$  euroa. Yhden stipendin suuruudeksi tulee  $26\,000/14 = 1860$  euroa.

**b)** Tuotosta siirretään pääomaan joka vuosi  $0,30 \cdot 5,4\% = 1,62\%$ . Viidessä vuodessa pääoma kasvaa määrään  $1,0162^5 \cdot 1,8 \cdot 10^6 \approx 1,950601 \cdot 10^6$ .

*Vastaus:* **a)** 1860 euroa, **b)** 1,95 miljoonaan euroon.

- 15.** Vektori  $\overline{AB} = (4 - 1)\vec{i} + (5 - 2)\vec{j} + (6 - 3)\vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ . Sen pituus on  $\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$ . Vektori  $\overline{AC} = (9 - 1)\vec{i} + (8 - 2)\vec{j} + (7 - 3)\vec{k} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$ . Sen pituus on  $\sqrt{8^2 + 6^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$ . Kulmalle  $\alpha = \angle BAC$  pätee  $\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{3 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{87}} \approx 0,964901$ , joten  $\alpha \approx 15,2252^\circ$ .

*Vastaus:*  $15^\circ$ .