Pitkä matematiikka 23.3.2011, ratkaisut:

1. **a)** $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{x-2} \iff 2(x-2) = 3x \iff 2x - 4 = 3x \iff x = -4.$

b) $x^2 - 2 \leq x \iff x^2 - x - 2 \leq 0$. Vasemman puolen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselia kohdissa $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ eli kun $x = -1$ tai $x = 2$. Epäyhtälö toteutuu, kun $-1 \leq x \leq 2$.

c) $\frac{3}{2}x - 6 = 0 \iff x = 4$. Kun $x \leq 4$, on $|\frac{3}{2}x - 6| = 6 \iff -\frac{3}{2}x + 6 = 6 \iff x = 0$. Kun $x > 4$, on $|\frac{3}{2}x - 6| = 6 \iff \frac{3}{2}x - 6 = 6 \iff x = 8$. Yhtälö toteutuu, kun $x = 0$ tai $x = 8$.

2. **a)** Osakkeen arvo oli nousun jälkeen $1{,}12 \cdot 35{,}50$ euroa ja laskun jälkeen $0{,}9 \cdot 1{,}12 \cdot 35{,}50 = 1{,}008 \cdot 35{,}50 = (1 + \frac{0{,}8}{100}) \cdot 35{,}50$ euroa. Arvo nousi 0,8 prosenttia.

b) Kulmakerroin on $\dfrac{-3-1}{5+2} = -\dfrac{4}{7}$.

c) $5 \ln 2 - \ln 8 = \ln 2^5 - \ln 8 = \ln \frac{32}{8} = \ln 4$. Siis $e^{5 \ln 2 - \ln 8} = e^{\ln 4} = 4$.

3. **a)** $f(x) = g(x) \iff xe^{-x^2} = 2e^{-x^2} \iff x = 2$.

b) $f'(x) = e^{-x^2} + (-2x)xe^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Siis $f'(1) = (1-2)e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

c) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \Big/_{0}^{1} -\frac{1}{2}e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-0}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$.

4. Polynomille $P(x) = ax^2 + bx + c$ pätee: $P(0) = c = 2^0 \iff c = 1$,
$P(1) = a + b + c = 2^1 \iff a + b = 1$, $P(2) = 4a + 2b + c = 2^2 \iff 4a + 2b = 3$.
On saatu yhtälöpari $a + b = 1$, $4a + 2b = 3$, jonka ratkaisu on $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.
Vastaus: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

5. Polynomi $P(x) = x(x+3)(5-x) = -x^3 + 2x^2 + 15x$. Derivaatan $P'(x) = -3x^2 + 4x + 15$ nollakohdat ovat $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 12 \cdot 15}}{-6} = \dfrac{-4 \pm 14}{-6}$ eli $x = -\frac{5}{3}$ ja $x = 3$. Näistä vain $x = 3$ kuuluu tarkasteluvälille. Koska $P(-1) = -12$, $P(3) = 36$ ja $P(5) = 0$, on välillä $[-1, 5]$ polynomin suurin arvo 36 ja pienin -12.
Vastaus: Suurin arvo on 36 ja pienin -12.

6. Lasten loton kymmenestä ruudusta voidaan rastittaa kolme $\binom{10}{3} = 120$ eri tavalla.
Nolla oikein saadaan $\binom{3}{0}\binom{7}{3} = 35$ eri tavalla, joten sen todennäköisyys on $\frac{35}{120} = \frac{7}{24}$.
Yksi oikein saadaan $\binom{3}{1}\binom{7}{2} = 63$ eri tavalla, joten sen todennäköisyys on $\frac{63}{120} = \frac{21}{40}$.
Kaksi oikein saadaan $\binom{3}{2}\binom{7}{1} = 21$ eri tavalla, joten sen todennäköisyys on $\frac{21}{120} = \frac{7}{40}$.
Kolme oikein saadaan vain yhdellä tavalla, joten sen todennäköisyys on $\frac{1}{120}$.
Todennäköisyyksien summa on $\frac{35}{120} + \frac{63}{120} + \frac{21}{120} + \frac{1}{120} = 1$, kuten pitääkin.
Vastaus: Todennäköisyydet ovat $\frac{7}{24}$, $\frac{21}{40}$, $\frac{7}{40}$ ja $\frac{1}{120}$. Niiden summa on yksi.

7. **a)** Kun leijan 144° kärki yhdistetään vastakkaiseen kärkeen, leija jakautuu kahteen yhteneväiseen tasakylkiseen kolmioon, joissa kantakulmat ovat 72° ja kärkikulma 36°. Kyljen pituudelle x saadaan sinilauseesta yhtälö $\dfrac{x}{\sin 72^\circ} = \dfrac{1}{\sin 36^\circ}$, jonka ratkaisu on $x = \dfrac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 1{,}618034$.
Kun nuolen 216° kärki yhdistetään vastakkaiseen kärkeen, nuoli jakautuu kahteen yhteneväiseen tasakylkiseen kolmioon, jossa kantakulmat ovat 36° ja kärkikulma 108°. Kannan pituudelle y saadaan sinilauseesta yhtälö $\dfrac{y}{\sin 108^\circ} = \dfrac{1}{\sin 36^\circ}$, jonka ratkaisu on $y = \dfrac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \dfrac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = x \approx 1{,}618034$.

b) Leijan pinta-ala A saadaan kahden osakolmion summana, $A = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \sin 36^\circ \approx 1{,}5388418$. Samoin saadaan nuolen pinta-ala B, $B = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin 108^\circ \approx 0{,}9510565$.

Vastaus: **a)** Muiden sivujen pituus on 1,618. **b)** Leijan pinta-ala on 1,539 ja nuolen 0,951.

8. On oltava $\overline{a} = \overline{u} + \overline{v}$, missä $\overline{u} = t\overline{b}$ ja $\overline{v} \cdot \overline{b} = 0$. Edelleen $\overline{v} \cdot \overline{b} = (\overline{a} - t\overline{b}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b} - t\overline{b} \cdot \overline{b} = -3 - 9t$. Tämä pistetulo on nolla, kun $t = -\frac{1}{3}$. Näin ollen $\overline{u} = -\frac{1}{3}\overline{b} = -\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} = \frac{14}{3}\overline{i} - \frac{14}{3}\overline{j} + \frac{7}{3}\overline{k}$.

Vastaus: $\overline{u} = -\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$ ja $\overline{v} = \frac{14}{3}\overline{i} - \frac{14}{3}\overline{j} + \frac{7}{3}\overline{k}$.

9. **a)** Koska $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = -\dfrac{3}{4}$, jono on geometrinen ja sen suhdeluku $q = -\frac{3}{4}$. Jonon yleinen termi $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{5}{4} \cdot (-\frac{3}{4})^{n-1}$.

b) Koska $|q| = \frac{3}{4} < 1$, sarja suppenee. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \dfrac{5}{7}$.

10. Välillä $[0, \pi]$ on $\sin x \geq 0$ ja välillä $]\pi, 2\pi]$ on $\sin x \leq 0$. Pinta-ala on
$\int_0^\pi ((f(x) + \sin x) - f(x))dx + \int_\pi^{2\pi} (f(x) - (f(x) + \sin x))dx =$
$\int_0^\pi \sin x\, dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x\, dx = -\Big/_{0}^{\pi} \cos x + \Big/_{\pi}^{2\pi} \cos x = \cos 0 + \cos 2\pi - 2\cos \pi = 4.$

Vastaus: Pinta-ala on 4.

11. **a)** Funktio $f(x)$ on jatkuva, kun $x < -1$ sekä kun $x > -1$. Lisäksi $f(-1) = a$. Koska $\lim_{x \to (-1)+} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, on $f(x)$ jatkuva myös kohdassa $x = -1$, kun $a = \frac{1}{2}$.

b) Kun $x < -1$, on $f'(x) = D\frac{1}{2}x^2 = x$ ja $\lim_{x \to (-1)-} f'(x) = -1$. Kun $x > -1$, on $f'(x) = \dfrac{2x(1 + x^2) - 2x \cdot x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$ ja $\lim_{x \to (-1)+} f'(x) = \dfrac{-2}{(1+1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Koska toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, ei $f'(x)$ ole jatkuva kohdassa $x = -1$.

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 + 1/x^2} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$.

Vastaus: **a)** $a = \frac{1}{2}$, **b)** ei ole, **c)** 1.

12. Selvästi $46 \equiv 1 \pmod 5$, joten myös $46^{78} \equiv 1 \pmod 5$. Edelleen, $89 \equiv 4 \pmod 5$, joten myös $89^{67} \equiv 4 \pmod 5$. Näin ollen löytyy kokonaisluvut m ja n siten, että $46^{78} + 89^{67} = 5m + 1 + 5n + 4 = 5(m + n + 1)$. Tämä osoittaa, että luku on jaollinen viidellä.

13. Polynomille $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ pätee $P(1) = 2 - 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, joten $P(x)$ on jaollinen tekijällä $x - 1$. Jakolasku antaa $P(x) = (x - 1)Q(x)$, missä $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$. Koska $Q(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{8} + \frac{1}{4} - 1 + 1 = 0$, on $Q(x)$ jaollinen tekijällä $x + \frac{1}{2}$. Jakolasku antaa $Q(x) = (x + \frac{1}{2})(2x^2 + 2) = (2x + 1)(x^2 + 1)$. Polynomilla $x^2 + 1$ ei ole nollakohtia $\mathbb{R}$:ssä, joten sitä ei voida enää jakaa ensi asteen tekijöihin. *Vastaus:* $(x - 1)(2x + 1)(x^2 + 1)$.

***14.** **a)** $f(x) \geq g(x) \iff h(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0$. Nyt $h'(x) = -\sin x + x$ ja $h''(x) = -\cos x + 1$. Koska $\cos x \leq 1$ ja $\cos x = 1$ vain kun $x = 2n\pi$, on $h''(x) \geq 0$ ja $h''(x) = 0$ vain kun $x = 2n\pi$. Näin ollen $h'(x)$ on aidosti kasvava kaikilla arvoilla x ja sillä on korkeintaan yksi nollakohta. Edelleen, $h'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$, joten $x = 0$ on $h'(x)$:n ainoa nollakohta. Koska $h'(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $h'(x) > 0$, kun $x > 0$, saa $h(x)$ pienimmän arvonsa kohdassa $x = 0$ ja $h(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0$. Näin ollen aina $h(x) \geq 0$ eli $f(x) \geq g(x)$. Kohta a) on näytetty oikeaksi.

b) $f(x) = g(x) \iff h(x) = 0$. Kohdan a) mukaan aina $h(x) \geq 0$ ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $x = 0$. Näin ollen yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, $x = 0$.

c) Kohdan a) mukaan erotuksen $f(x) - g(x) = h(x)$ suurin arvo välillä $[-\pi, \pi]$ saavutetaan jommassakummassa päätepisteessä. Nyt $h(-\pi) = \cos(-\pi) - 1 + \frac{1}{2}(-\pi)^2 = \frac{1}{2}\pi^2 - 2$ ja $h(\pi) = \cos \pi - 1 + \frac{1}{2}\pi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 - 2$. Siis erotuksen suurin arvo on $\frac{1}{2}\pi^2 - 2$.

d) Pinta-ala on $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))dx = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2)dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 =$ $\sin \pi - \pi + \frac{1}{6}\pi^3 - (\sin(-\pi) + \pi - \frac{1}{6}\pi^3) = \frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi$.

***15.** **a)** Parametria t vastaavan ympyrän keskipiste on $(0, R(t))$ ja säde $R(t)$. Ympyrän yhtälö on muotoa $(x - 0)^2 + (y - R(t))^2 = R^2(t)$. Koska piste A on ympyrän kehällä ja $t > 0$, on $t^2 + (t^2 - R(t))^2 = R^2(t) \iff t^4 + (1 - 2R(t))t^2 = 0 \iff t^2 + 1 - 2R(t) = 0$. Tästä saadaan $R(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$.

b) $R_0 = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{2}(t^2 + 1) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$.

c) Rajaympyrän yhtälö on $x^2 + (y - R_0)^2 = R_0^2 \iff y^2 - 2R_0 y + x^2 = 0$. Tästä $y = \dfrac{2R_0 \pm \sqrt{4R_0^2 - 4x^2}}{2} = R_0 \pm \sqrt{R_0^2 - x^2}$, missä miinus-merkki antaa rajaympyrän alemman puolen. Näin ollen $g(x) = R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$.

d) $g'(x) = 0 + x(R_0^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ja $g''(x) = (R_0^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2(R_0^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Siis $g''(0) = (R_0^2 - 0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2}} = 1/R_0$. Edelleen, $f'(x) = 2x$ ja $f''(x) = 2 = 1/R_0$, joten $g''(0) = f''(0) = 1/R_0$.