

**Pitkä matematiikka 23.3.2012, ratkaisut:**

1. a)  $x^2 - x - 6 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ . Siis  $x = -2$  tai  $x = 3$ .

b)  $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0 \iff 3x - 9(x-3) - 2 \cdot 7 = 0 \iff -6x + 13 = 0 \iff x = \frac{13}{6}$ .

c)  $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0 \iff \frac{x^2}{2} - 2 = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$ .

Vastaus: a)  $x = -2$  tai  $x = 3$ , b)  $x = \frac{13}{6}$ , c)  $x = -2$  tai  $x = 2$ .

2. a)  $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2 = \frac{15}{4} - 2^2 = \frac{15 - 4 \cdot 4}{4} = -\frac{1}{4}$ .

b)  $\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6 = \sqrt{6 \cdot 6} - 6 = 6 - 6 = 0$ .

c)  $\ln \frac{x}{2} + \ln 2 = \ln x - \ln 2 + \ln 2 = \ln x$ .

d)  $\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

e)  $\int_0^1 (x+1)dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ .

f)  $f'(x) = D(4e^{2x}) = 8e^{2x}$ . Siis  $f'(0) = 8e^0 = 8$ .

3. Pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  määräävät kolmion. Kärjestä  $A$  lähtevät paikkavektorit ovat

$$\overline{AB} = (4-2)\vec{i} + (0-1)\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ ja } \overline{AC} = (5-2)\vec{i} + (7-1)\vec{j} = 3\vec{i} + 6\vec{j}.$$

Koska  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$ , ovat vektorit kohtisuorat. Siis  $A$ :ssa oleva kolmion kulma on suora eli kolmio on suorakulmainen.

4. Vektorin  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  kohtisuora projektio  $xy$ -tasolle on vektori  $x\vec{i} + y\vec{j}$ . Näin ollen  $x\vec{i} + y\vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ , josta saadaan, että  $x = 2$  ja  $y = 3$ . Siis  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + z\vec{k}$  ja  $|\vec{a}|^2 = 4 + 9 + z^2 = 22$ , josta saadaan, että  $z^2 = 9$  eli  $z = \pm 3$ . Kysytyt vektorit ovat  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \pm 3\vec{k}$ .

Vastaus:  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$  tai  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ .

5. Funktio  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  on määritelty, kun  $x > 0$ . Sen derivaatta  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  häviää, kun  $\ln x = 1$  eli kun  $x = e$ . Koska  $f'(x) > 0$ , kun  $0 < x < e$  ja  $f'(x) < 0$ , kun  $x > e$ , saavuttaa funktio suurimman arvonsa pisteessä  $x = e$  ja  $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ .

Vastaus:  $1/e$ .

6. a) Koska  $P(\text{ainakin 1 maali}) = 1 - P(\text{ei maaliakaan})$  ja

$$P(\text{ei maaliakaan}) = (1 - 0,65)(1 - 0,75)(1 - 0,54) = 0,04025, \text{ on}$$

$$P(\text{ainakin 1 maali}) = 1 - 0,04025 = 0,95975 \approx 0,96.$$

b) Olkoon  $P(n)$  todennäköisyys sille, että tulee  $n$  maalia. Tällöin odotusarvo on  $E = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3)$ . Nyt

$$P(1) = 0,65(1 - 0,75)(1 - 0,54) + 0,75(1 - 0,65)(1 - 0,54) + 0,54(1 - 0,65)(1 - 0,75) = 0,24275,$$

$$P(2) = 0,65 \cdot 0,75(1 - 0,54) + 0,65 \cdot 0,54(1 - 0,75) + 0,75 \cdot 0,54(1 - 0,65) = 0,45375,$$

$$P(3) = 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,54 = 0,26325.$$

$$\text{Näin ollen } E = 0 + 1 \cdot 0,24275 + 2 \cdot 0,45375 + 3 \cdot 0,26325 = 1,94.$$

*Vastaus:* **a)** 0,96, **b)** 1,94.

7. **a)** Ehdosta  $y(0) = \frac{1}{t}$  saadaan  $c = \frac{1}{t}$ . Derivaatta  $y'(x) = 2ax + b$ . Sivuaamiseksi on  $y'(t) = 0$  ja  $y(t) = 0$ . Edellinen antaa  $2at + b = 0 \iff b = -2at$ . Jälkimmäisestä saadaan nyt  $y(t) = at^2 - 2at \cdot t + \frac{1}{t} = 0$  eli  $-at^2 + \frac{1}{t} = 0 \iff a = \frac{1}{t^3}$ . Tällöin  $b = -\frac{2}{t^2}$ . Polynomi on siis  $y(x) = \frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}$ .

**b)** Koska  $t > 0$ , on kysytty pinta-ala  $\int_0^t (\frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t})dx = \int_0^t \frac{1}{3t^3}x^3 - \frac{1}{t^2}x^2 + \frac{1}{t}x = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}$ . Pinta-ala on siis sama kaikilla arvoilla  $t$ , mikä todistaa väitteen.

*Vastaus:* **a)**  $a = \frac{1}{t^3}$ ,  $b = -\frac{2}{t^2}$ ,  $c = \frac{1}{t}$ .

8. **a)** Peruuntumisehto on  $f(t) > \frac{1}{2} \cdot 5000 \iff \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}} > \frac{1}{2} \cdot 5000 \iff$

$1 + 4999e^{-0,8t} < 2 \iff e^{-0,8t} < \frac{1}{4999}$ . Ottamalla puolittain logaritmit saadaan ehto muotoon  $t > \frac{\ln 4999}{0,8} \approx 10,6462$ . Peruutus tapahtuu siis 11 vuorokauden kuluttua.

**b)** Koska  $f'(t) = \frac{5000 \cdot 0,8 \cdot 4999e^{-0,8t}}{(1 + 4999e^{-0,8t})^2} > 0$  kaikilla  $t > 0$ , on  $f(t)$  aidosti kasvava funktio, kun  $t > 0$ .

**c)**  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}} = \frac{5000}{1 + 4999 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,8t}} = \frac{5000}{1 + 0} = 5000$ .

*Vastaus:* **a)** 11 vuorokautta, **c)** 5000.

9. Leikataan kartiota sen akselin kautta kulkevalla tasolla. Olkoon leikkauskuviossa  $A$  pohjan keskipiste,  $AB$  pohjan säde,  $C$  kartion huippu,  $D$  katkaistun kartion yläympyrän keskipiste ja  $DE$  yläympyrän säde. Suorakulmaisesta kolmiosta  $ABC$  saadaan, että reunaviiva  $CB = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ . Yhdenmuotoisuuden perusteella  $\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$ , josta saadaan  $CE = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}\sqrt{29}$ . Tämä on rengasalueen sisäympyrän säde. Ulkoympyrän säde on  $CB = \sqrt{29}$ . Rengasalueen pinta-ala on siten  $\pi(\sqrt{29})^2 - \pi(\frac{1}{2}\sqrt{29})^2 = \frac{3}{4} \cdot 29\pi \approx 68,3296$  (cm<sup>2</sup>).

*Vastaus:* 68 cm<sup>2</sup>.

10. **a)**  $3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0 \iff \tan \frac{x}{2} = -1 \iff \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + n\pi \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$ .
- b)**  $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0 \iff 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0 \iff 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ . Tämän ratkaisu on  $\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 2 \cdot 4}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$  eli  $\cos x = \frac{1}{2}$  tai  $\cos x = 1$ . Edellisestä saadaan  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$  ja jälkimmäisestä  $x = 2n\pi, n \in Z$ .
- Vastaus:* **a)**  $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$ , **b)**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$  tai  $x = 2n\pi, n \in Z$ .

11. Kolmion  $K_1$  korkeusjanan pituus on  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Piirtämällä ympyrälle  $Y_1$  säde  $r_1$  kohtisuoraan  $K_1$ :n kylkeä vastaan saadaan sen yläpuolelle kolmio, jonka toinen kateetti on  $r_1$  ja korkeusjanalla oleva hypotenuusa  $2r_1$ . Näin ollen korkeusjanan pituus on  $3r_1$ , joten  $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r_1$ , josta saadaan  $r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ .

Piirretään sitten  $Y_1$ :n keskipisteestä säde kolmion  $K_2$  huippuun ja jana kohtisuoraan  $K_2$ :n kylkeä vastaan. Saadaan kolmio, jonka hypotenuusa on  $r_1$  ja lyhyempi kateetti  $\frac{1}{2}r_1$ . Pitempi kateetti on  $\frac{\sqrt{3}}{2}r_1$ . Tästä saadaan, että kolmion  $K_2$  sivun pituus  $a_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r_1 = r_1\sqrt{3}$ .

Menettelemällä kuten edellä nähdään, että kolmion  $K_2$  sisään asetetun ympyrän  $Y_2$  säde  $r_2 = \frac{a_2}{2\sqrt{3}} = \frac{r_1\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r_1$  ja että ympyrän  $Y_2$  sisään asetetun kolmion  $K_3$  sivun pituus  $a_3 = r_2\sqrt{3}$ .

Aivan vastaavasti nähdään, että kolmion  $K_3$  sisään asetetun ympyrän  $Y_3$  säde on  $r_3 = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_1$ .

Jatkamalla nähdään, että kolmioihin asetettujen ympyröiden säteet muodostavat geometrisen jonon  $r_1, \frac{1}{2}r_1, \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_1, \left(\frac{1}{2}\right)^3 r_1, \dots$ . Tämän perusteella ympyröiden pintaalojen summa on suppeneva geometrinen summa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 = \pi r_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \pi r_1^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \pi \frac{a^2}{4 \cdot 3} \cdot \frac{4}{3} = \pi \frac{a^2}{9}.$$

Vastaus:  $\pi \frac{a^2}{9}$ .

12. a) Viivakoodille pätee  $3(1+2+8+5+0+2)+4+6+2+9+3+d_{12} = 0 \pmod{10} \iff 78 + d_{12} = 0 \pmod{10} \iff d_{12} = 2 \pmod{10} \implies d_{12} = 2$ .

b) Nyt  $3(1+3+5+7+9+2)+2+4+6+8+1+3 = 3 \cdot 27 + 24 = 105 \not\equiv 0 \pmod{10}$ , joten viivakoodi on virheellinen.

c) Edellisen mukaan merkillä  $d_3$  pätee  $3(24 + d_3) + 24 = 0 \pmod{10} \iff 96 + 3d_3 = 0 \pmod{10} \iff 3(32 + d_3) = 0 \pmod{10} \implies d_3 = 8$ .

Vastaus: a)  $d_{12} = 2$ , c)  $(1, 2, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$ .

13. Leikkauspisteiden  $x$ -koordinaatit saadaan jatkuvan funktion  $h(x) = f(x) - g(x) = 1 - x - 3 \cos x$  nollakohtina. Koska  $h(-0,885) < -0,014 < 0$  ja  $h(-0,89) > 0,0017 > 0$ , on funktiolla  $h(x)$  nollakohta  $x_1$  välillä  $] -0,885; -0,89[$ . Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on  $x_1 = -0,89$ .

Koska  $h(1,86) < -0,0044 < 0$  ja  $h(1,865) > 0,0049 > 0$ , on  $h(x)$ :llä toinen nollakohta  $x_2$  välillä  $]1,86; 1,865[$ . Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on  $x_2 = 1,86$ .

Koska  $h(3,635) > 0,0071 > 0$  ja  $h(3,64) < -0,0049 < 0$ , on  $h(x)$ :llä kolmas nollakohta  $x_3$  välillä  $]3,635; 3,64[$ . Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on  $x_3 = 3,64$ .

Leikkauspisteiden  $y$ -koordinaatit ovat  $y_1 = f(x_1) = 1 - x_1 \approx 1,89$ ,  $y_2 = 1 - x_2 \approx -0,86$  ja  $y_3 = 1 - x_3 \approx -2,64$ .

Vastaus:  $(-0,89; 1,89)$ ,  $(1,86; -0,86)$  ja  $(3,64; -2,64)$ .

**\*14. a)** Kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  on  $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$ .

**b)**  $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right) = \frac{1}{2}(e^x - (-1)e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ .

**c)**  $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Näin ollen  $\sinh x$  on aidosti kasvava, josta seuraa, että sillä on käänteisfunktio.

Määritetään käänteisfunktion lauseke.  $y = \sinh x \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff 2ye^x = (e^x)^2 - e^x e^{-x} \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$ .

Tästä ratkeaa  $e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ . Miinusmerkki ei kelpaa, koska  $e^x > 0$  aina, joten  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ . Ottamalla logaritmi saadaan käänteisfunktion lausekkeeksi  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ .

**d)** Koska aina  $|y| < \sqrt{y^2 + 1}$ , on  $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$  kaikilla  $y \in \mathbb{R}$ . Näin ollen käänteisfunktio  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$  on määritelty kaikilla  $y \in \mathbb{R}$  eli sen määrittelyjoukko on  $\mathbb{R}$ .

**\*15. a)** Piirretään  $x$ -akselin suuntainen suora  $r_1$ -säteisen ympyrän keskipisteestä kuvioon piirretylle säteelle  $r_2$ . Tällöin syntyy suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on  $r_1 + r_2$  ja kateetit  $r_2 - r_1$  sekä  $d$ . Tällöin  $d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 \iff d^2 = 2r_1 r_2 + 2r_1 r_2 \implies d = 2\sqrt{r_1 r_2}$ .

**b)** Piirretään pienen ympyrän keskipisteestä  $O_3$   $x$ -akselin suuntainen suora kuvioon piirretylle säteelle  $r_1$  sekä yhdistetään  $O_3$   $r_1$ -säteisen ympyrän keskipisteeseen. Tällöin saadaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on  $r_1 + r_3$  ja pystysuora kateetti  $r_1 - r_3$ . Toisen kateetin pituudelle  $d_1$  saadaan yhtälö  $d_1^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 \iff d_1 = 2\sqrt{r_1 r_3}$ .

Vastaavasti saadaan toiselle puolelle suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on  $r_2 + r_3$  ja pystysuora kateetti  $r_2 - r_3$ . Toisen kateetin pituudelle  $d_2$  saadaan yhtälö  $d_2^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 \iff d_2 = 2\sqrt{r_2 r_3}$ .

Edellisen kohdan mukaan  $2\sqrt{r_1 r_2} = d = d_1 + d_2 = 2(\sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3})$ , josta saadaan  $\sqrt{r_3}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) = \sqrt{r_1 r_2} \implies r_3 = \left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}\right)^2 = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$ .

**c)**  $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \iff k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2k_1 k_2 + 2k_1 k_3 + 2k_2 k_3$ .

Sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön  $k_1 = \frac{1}{r_1}$ ,  $k_2 = \frac{1}{r_2}$  ja  $k_3 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{r_1 r_2}$  sekä sievennetään. Tällöin saadaan

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{6}{r_1 r_2} + \frac{4}{r_1 \sqrt{r_1 r_2}} + \frac{4}{r_2 \sqrt{r_1 r_2}},$$

$$2k_1 k_2 + 2k_1 k_3 + 2k_2 k_3 = \frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{6}{r_1 r_2} + \frac{4}{r_1 \sqrt{r_1 r_2}} + \frac{4}{r_2 \sqrt{r_1 r_2}}.$$

Koska lausekkeet ovat yhtäsuuret, on kaava oikea.