

**Lyhyt matematiikka 27.9.2000, ratkaisut:**

1. Yhtälön  $\frac{3}{5}x + 2 = 1$  ratkaisu on  $x = -\frac{5}{3}$ . Koska  $3(-\frac{5}{3})^2 - 7(-\frac{5}{3}) - 20 = \frac{25}{3} + \frac{35}{3} - 20 = 0$ , toteuttaa  $-\frac{5}{3}$  myös toisen yhtälön. Näin ollen yhtälöillä on samoja ratkaisuja.
2. Yksi dollari oli 11.1. euroissa  $\frac{1}{1,1569} \approx 0,86438$  EUR ja 12.7. vastaavasti  $\frac{1}{1,0124} \approx 0,98775$  EUR. Koska  $\frac{1}{1,0124} : \frac{1}{1,1569} = \frac{1,1569}{1,0124} \approx 1,1427$ , vahvistui dollarin kurssi euroon nähden 14,3 %. Samoin yksi jeni oli 11.1. euroissa  $\frac{1}{126,33} \approx 0,0079158$  EUR ja 12.7. vastaavasti  $\frac{1}{123,82} \approx 0,0080762$  EUR. Koska  $\frac{1}{123,82} : \frac{1}{126,33} = \frac{126,33}{123,82} \approx 1,0203$ , vahvistui jenin kurssi euroon nähden 2,0 %.
3. Jos veroton hinta on  $x$  mk, on  $1,22x = 136$ , joten  $x \approx 111,475$ . Uusi arvonlisävero on 12 % ja uusi maksu on  $1,12x \approx 124,85$  mk. Vastaus: Maksu olisi ollut 124,90 mk.
4. Tynnyrin tilavuus on  $V_1 = \pi \cdot 0,35^2 \cdot 1,20 \approx 0,46181 \text{ m}^3 = 461,81 \text{ dm}^3$ . Tyhjän tilan tilavuus on  $V_1 - 120 \approx 341,81 \text{ dm}^3$  ja korkeus  $\frac{341,81}{\pi \cdot 3,5^2} \approx 8,882$  dm. Vastaus: 89 cm.
5. Tavoitteen mukainen matka-aika on  $\frac{25}{23} \text{ h} = \frac{25 \cdot 60}{23} \text{ min} \approx 65,217$  min. Aikaa loppumatkaan on siis  $65,217 - 38 = 27,217$  min. Vastaus: 27 minuutissa.
6. Funktion  $f$  derivaatta  $f'(a)$  on funktion kuvaajan pisteeseen  $(a, f(a))$  piirretyn tangentin kulmakerroin. **a)** Suoran  $4y + 5x = 2$  eli  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$  kulmakerroin on  $-\frac{5}{4}$ , joten  $f'(1) = -\frac{5}{4}$ . **b)** Funktion  $f(x) = x^2$  kuvaajan ja suoran  $y = x - 2$  yhteisten pisteiden  $x$ -koordinaatit toteuttavat yhtälön  $x^2 - x + 2 = 0$ . Koska ratkaisukaavan juuret on  $1 - 8 < 0$ , ei yhtälöllä ole reaalisia ratkaisuja. Suora ei siis kosketa funktion kuvaajaa missään pisteessä, eikä näin ollen voi olla kuvaajan tangentti.
7. Jos elävän hain hampaan C-14 isotoopin määrä on  $m$  ja määrä pienenee  $0,09m$ :ksi  $5730x$  vuodessa, on  $0,5^x m = 0,09m$ . Tällöin  $x = \frac{\log 0,09}{\log 0,5} \approx 3,4739$ , josta tulee ajaksi  $5730 \cdot 3,4739 = 19905,6$ . Vastaus: Noin 20 000 vuotta vanha.
8. **a)** Jos viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa, on erilaisia kokoonpanoja  $2^5 = 32$ .  
**b)** Jos 15 tehtävästä on valittava 10, on erilaisia kokoonpanoja  $\binom{15}{10} = 3003$ .
9. Jos sivulle  $AB$  asetetaan piste  $D = (-2, \sqrt{2})$ , saadaan suorakulmaiset kolmiot  $ADC$  ja  $BDC$ . Jos  $\angle CAD = \alpha$ , on  $\tan \alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{5}{\sqrt{2}}$  ja  $\alpha \approx 74,207^\circ$ . Jos  $\angle CBD = \beta$ , on  $\tan \beta = \frac{DC}{BD} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$  ja  $\beta \approx 60,504^\circ$ . Lopuksi kolmion  $ABC$   $C$ :ssä oleva kulma on  $180^\circ - \alpha - \beta \approx 45,289^\circ$ . Vastaus: Kolmion kulmat ovat  $74,2^\circ$ ;  $60,5^\circ$ ;  $45,3^\circ$ .

- 10.** Olkoon poisleikatun neliön sivu  $x$  dm,  $0 \leq x \leq 2,5$ . Tällöin marjalaatikon tilavuus litroina on  $V(x) = x(8 - 2x)(5 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ . Tilavuuden derivaatta on  $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$ .  $V'(x) = 0$ , kun  $x = 10/3$  tai  $x = 1$ . Näistä arvoista vain  $x = 1$  kuuluu tarkasteltavalle välille  $[0; 2,5]$ . Tilavuuden suurin arvo saavutetaan joko välin  $[0; 2,5]$  päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa  $x = 1$ . Koska  $V(0) = V(2,5) = 0$  ja  $V(1) = 18$ , on suurimman mahdollisen laatikon korkeus 1 dm eli 10 cm. Tällaiseen laatikkoon mahtuu 18 litraa marjoja.
- 11. a)** Toipilaan voimisteluaajat minuutteina muodostavat geometrisen jonon. Jonon ensimmäinen termi on 15, toinen  $1,05 \cdot 15$ , kolmas  $1,05^2 \cdot 15, \dots, n:s 1,05^{n-1} \cdot 15$  ja 30. termi  $1,05^{29} \cdot 15 \approx 61,74$  min. Vastaus: 62 min. **b)** Kokonaisaika on geometrinen summa  $\sum_{n=1}^{30} 1,05^{n-1} \cdot 15 = 15 \frac{1 - 1,05^{30}}{1 - 1,05} \approx 996,58$  min. Vastaus: 16 h 37 min.
- 12.** Olkoon ympyrän säde  $r$ , keskipiste  $O$  sekä  $A$  ja  $B$  peräkkäiset monikulmion kärjet. Kolmiossa  $OAB$  kulma  $O$  on  $360^\circ/12 = 30^\circ$  ja sivu  $AB$  12-kulmion sivu  $a$ . Jos  $C$  on  $AB$ :n keskipiste, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta  $OCA$ , että  $\frac{1}{2}a = r \sin 15^\circ$ . Näin ollen 12-kulmion piirin pituus on  $12a = 24r \sin 15^\circ$ . Luku  $\pi$  ( $\approx 3,14159$ ) on ympyrän kehän suhde halkaisijaan. Jos ympyrän kehä korvataan 12-kulmion piirillä, saadaan  $\pi$ :lle likiarvo  $12a/2r = 12 \sin 15^\circ \approx 3,106$ . Vastaus: 12-kulmion piirin pituus on  $24r \sin 15^\circ$ . Sillä saadaan  $\pi$ :lle likiarvo kahden numeron tarkkuudella.
- 13.** Funktion suurin arvo on funktion saamista arvoista suurin, ts. välillä  $[a, b]$  määritellyn funktion  $f$  suurin arvo on  $f(x_o)$ , jos jokaisella arvolla  $x, a \leq x \leq b$ , on  $f(x) \leq f(x_o)$ . Esimerkiksi välillä  $[-1, 1]$  määritellyn funktion  $f(x) = x^2$  suurin arvo on 1, koska jokaisessa pisteessä  $x, -1 \leq x \leq 1$ , on  $f(x) = x^2 \leq 1$  ja  $f(1) = 1 = f(-1)$ . Samalla on osoitettu, että funktio voi saada suurimman arvonsa kahdessa pisteessä. Mm. kaikilla reaaliarvoilla  $x$  määritellyllä funktiolla  $f(x) = x$  ei ole suurinta arvoa. Jos nimittäin  $a$  olisi suurin arvo, olisi  $f(a+1) = a+1 > a$ , mikä on ristiriidassa määritelmän kanssa.
- 14. a)** Jos korkokanta on  $p$  ja  $q = 1 + \frac{p}{100}$ , on  $q^6 \cdot 65\,000 = 95\,600$ , josta  $q = \sqrt[6]{\frac{956}{650}} \approx 1,066410$ . Siis korkokanta  $p = 100(q - 1) \approx 6,64$ . **b)** Jos vuotuinen inflaatio on 2 %, on sijoituksen reaaliarvo kuuden vuoden kuluttua  $1,02^{-6} \cdot 95\,600$ . Tällöin  $q^6 \cdot 65\,000 = 1,02^{-6} \cdot 95\,600$  eli  $q = \frac{1}{1,02} \sqrt[6]{\frac{956}{650}} \approx 1,045500$ , josta korkokannaksi tulee  $p \approx 4,55$ . Vastaus: **a)** 6,64, **b)** 4,55.

15. Tammikuun 1998 kyselyssä oli SDP:n suhteellinen osuus 0,236. Suhteellisen osuuden otosjakauman keskihajonta  $s = \sqrt{\frac{0,236(1 - 0,236)}{1900}} \approx 0,0097415$ . SDP:n kannatuksen 95 % luottamusväli tammikuussa on  $[0,236 - 1,96s; 0,236 + 1,96s] = [0,2169; 0,2551]$ . SDP:n syyskuun kannatusosuus 0,249 kuuluu em. luottamusväliin, joten ei voida sanoa, että SDP:n kannatus olisi tosiasiallisesti kasvanut 95 % luottamustasolla. Keskustan tammikuun kannatusosuus 0,232 kuuluu myös SDP:n kannatuksen 95 % luottamusväliin. Näin ollen ei voida myöskään sanoa, että SDP:n kannatus tammikuussa todella oli 95 % varmuudella suurempi kuin Keskustan.