Lyhyt matematiikka 21.9.2001, ratkaisut:

1. Koska $c = \frac{5}{9}(f-32)$, niin $f = \frac{9}{5}c + 32$. Jos siis $c = 38{,}2$, on $f = \frac{9}{5}\cdot 38{,}2 + 32 = 100{,}76 \approx 100{,}8$. Lämpötilalukemien ollessa samat on $f = c$. Tällöin on $c = \frac{5}{9}(c-32)$, josta saadaan kysytyksi lämpötilalukemaksi $c = -40$.

2. Koivutukin tilavuus $V = \pi 2{,}5^2 \cdot 40\ \mathrm{dm}^3 = 250\pi\ \mathrm{dm}^3$. Jos tiheys $\rho = 0{,}9\ \mathrm{kg/dm}^3$, on tukin massa $m = \rho V \approx 706{,}9$ kg. Vastaus: 700 kg.

3. Myyntihinnan m ja verottoman hinnan v yhteys on $m = 1{,}22v$ eli $v = m/1{,}22 = (1-0{,}18033)m$. Arvonlisävero on siis 18 % myyntihinnasta. Luku on sama kaikilla arvoilla m eli prosenttimäärä ei riipu myyntihinnasta.

4. Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{1}{8}(4a \pm \sqrt{16a^2+48a^2}) = \frac{1}{2}a \pm a$ eli $x = \frac{3}{2}a$ tai $x = -\frac{1}{2}a$. Arvolla $a = 0{,}001$ saadaan vastaukseksi $x = 0{,}0015$ tai $x = -0{,}0005$.

5. Jos oppilaita oli $100a$, oli arvosanojen summa $4\cdot 1{,}3a + 5\cdot 9{,}8a + 6\cdot 15{,}8a + 7\cdot 20{,}3a + 8\cdot 23{,}3a + 9\cdot 23{,}4a + 10\cdot 6{,}1a = 749{,}1a$. Keskiarvoksi tulee $749{,}1a/100a = 7{,}491$. Vastaus: 7,5.

6. Ajettaessa x km vuodessa ovat kustannukset markkoina $k_B = \frac{1}{100}\cdot 7{,}9\cdot 6{,}29\cdot x = 0{,}49691x$, jos auto on bensiinikäyttöinen ja $k_D = \frac{1}{100}\cdot 5{,}4\cdot 4{,}19\cdot x + 2700 = 0{,}22626x + 2700$, jos auto on dieselkäyttöinen. Dieselkäyttöisellä autolla ajaminen on edullisempaa, kun $k_D \le k_B$ eli kun $0{,}22626x + 2700 \le 0{,}49691x$ eli kun $x \ge 2700/0{,}27065 \approx 9975{,}98$. Vastaus: Dieselkäyttöinen auto on edullisempi ajettaessa vähintään 9980 km vuodessa.

7. Olkoon yhden osaston pituus x m ja leveys y m. Aitametrejä kertyy $6x + 10y$. Suurin ala saadaan, kun $6x + 10y = 200$ eli kun $y = 20 - \frac{3}{5}x$. Aitauksen ala $A = 5xy$ eli x:n funktiona $A(x) = 5x(20-\frac{3}{5}x) = 100x - 3x^2$, $0 < x < 100/3$. Koska $A'(x) = 100 - 6x$ on derivaatalla yksi nollakohta $x = 50/3 \approx 16{,}67$. Koska $A(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on tarkasteluvälillä, antaa $x = 50/3$ alalle suurimman arvon. Tällä arvolla x on $y = 20 - \frac{3}{5}\cdot\frac{50}{3} = 10$. Koko aitauksen ala on $5xy = 2500/3 \approx 833,33$ Vastaus: Yhden osaston mitat ovat $50/3$ m $\times 10$ m $\approx 16{,}67$ m $\times 10$ m . Koko aitauksen ala on $2500/3\ \mathrm{m}^2 \approx 833,33\ \mathrm{m}^2$.

8. Kun ensimmäinen auto A saapuu 100 km/h rajalle, on jälkimmäinen auto B d metrin päässä. B ajaa d m ajassa $t_B = d/v_1$. Tässä ajassa A etenee matkan $d_2 = t_B v_2 = dv_2/v_1$, mikä on uusi välimatka. Jos $v_1 = 120$ km/h, $v_2 = 100$ km/h ja $d = 150$ m, on uusi välimatka $d_2 = 150\cdot 100/120 = 125$ m.

9. Jos silmäluvun 1 todennäköisyys on a, on 2:n todennäköisyys $2a$, 3:n $3a$, 4:n $4a$, 5:n $5a$ ja 6:n $6a$. Todennäköisyyksien summan on oltava yksi, eli on oltava $21a = 1$, josta $a = 1/21$. Näin ollen 1:n todennäköisyys on $1/21$, 2:n $2/21$, 3:n $3/21 = 1/7$, 4:n $4/21$, 5:n $5/21$ ja 6:n $6/21 = 2/7$. Todennäköisyys saada kahdella heitolla kaksi kuutosta on $(2/7)^2 = 4/49 \approx 0{,}0816$ eli noin 8,2%.

10. Leikataan maapallo sen keskipisteen O, Brysselin B ja Helsingin H kautta kulkevalla tasolla. Olkoon kaarta BH vastaava keskuskulma 2α sekä P tunnelin BH keskipiste, jossa syvin kohta on. Tällöin $\frac{2\alpha}{360} = \frac{1650}{2\pi 6370}$, josta saadaan $\alpha = \frac{180 \cdot 1650}{2\pi 6370} \approx 7{,}4206^{\circ}$. Kolmiosta BPO saadaan, että etäisyys $OP = 6370 \cos\alpha$. Tunnelin suurin syvyys on silloin $6370 - OP = 6370(1 - \cos\alpha) \approx 53{,}35$ km. Koska kulma PBO on $90^{\circ} - \alpha$ on tunneliin ajokulma α. Vastaus: Tunnelin syvin kohta on 53 km syvyydessä. Tunneliin ajetaan $7{,}4^{\circ}$ kulmassa.

11. Tilillä oli Sveitsin frangeja vuoden kuluttua $1{,}008 \cdot 58$, kahden vuoden $1{,}008^2 \cdot 58$ ja n vuoden $1{,}008^n \cdot 58$. Pääoma on kaksinkertaistunut, kun $1{,}008^n \cdot 58 = 2 \cdot 58$. Tästä saadaan n:lle yhtälö $1{,}008^n = 2$ eli $n \lg 1{,}008 = \lg 2$, josta $n = \lg 2 / \lg 1{,}008 \approx 86{,}99$. Kyseessä on vuosi 1786. Tällöin pääoma on nelinkertaistunut ajassa $m = 2\lg 2/\lg 1{,}008 \approx 173{,}98$. Kyseessä on vuosi 1873. Vuoden 2001 alussa on pääoma kasvanut määrään $1{,}008^{302} \cdot 58 \approx 643{,}44$ Sveitsin frangia.

12. Jos c:n värähdysluku on $c = 130$, on d:n $k^2 c$, e:n $k^4 c$, f:n $k^5 c$, g:n $k^7 c$, a:n $k^9 c$, h:n $k^{11} c$ ja c_1:n $k^{12} c$. Viimeksimainitusta saadaan k:lle yhtälö $k^{12} c = 2c$ eli $k^{12} = 2$ eli $k = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946$. Asteikon sävelten värähdysluvut ovat $c = 130, d = 146, e = 164, f = 174, g = 195, a = 219, h = 245$ ja $c_1 = 260$.

13. Kun $f(x) = \frac{1}{x}$, on $f(2) + f(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Koska $f(5) = \frac{1}{5} \neq \frac{5}{6}$, on $f(2) + f(3) \neq f(5)$. Edelleen $f(2) + f(x) - f(2+x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2+x} = \frac{(x+2)^2 - 2x}{2x(2+x)} = \frac{(x+1)^2 + 3}{2x(2+x)}$. Tämä on määritelty ja nollasta poikkeava kaikilla reaaliluvuilla $x, x \neq 0, x \neq -2$. Näin ollen millään reaaliluvulla $x, x \neq 0, x \neq -2$ ei ole $f(2) + f(x) = f(2+x)$.

14. Stipendien yhteinen nykyarvo on euroina $K = 1{,}045^{-1} \cdot 200 + 1{,}045^{-2} \cdot 300 + 1{,}045^{-3} \cdot 400 + 1{,}045^{-4} \cdot 500 + 1{,}045^{-5} \cdot 600 \approx 1717{,}38$. Vastaus: On lahjoitettava 1718 euroa.

15. Tasovertailujen suorittamiseksi normitetaan jakaumat. Jos lukion A pistemäärät $x \sim N(72; 9{,}2)$, niin pistemäärät $z = (x - 72)/9{,}2 \sim N(0,1)$. Vastaavasti lukion B normitetut pistemäärät $z = (x - 72)/6{,}8 \sim N(0,1)$. Alinan normitettu pistemäärä $z_A = (82 - 72)/9{,}2 \approx 1{,}08696$ ja Bertan $z_B = (80 - 72)/6{,}8 \approx 1{,}17647$. Koska $z_B > z_A$ menestyi Bertta paremmin oman lukionsa tasoon verrattuna. Koska $P(72 < x < 80) = P(0 < z < z_B) = \Phi(z_B) - 0{,}5 = 0{,}8810 - 0{,}5 = 0{,}3810$, menestyi lukiossa B noin 38 % opiskelijoista keskitasoa paremmin, mutta Berttaa huonommin. Koska $P(x > 82) = 1 - P(z < z_A) = 1 - \Phi(z_A) = 1 - 0{,}8621 = 0{,}1379$, menestyi lukiossa A noin 14 % opiskelijoista Alinaa paremmin.