Lyhyt matematiikka 27.9.2002, ratkaisut:

1. Aviopuolisoiden palkkojen summa on 3155 euroa. Taiston osuus laskusta on siten $\frac{1801}{3155} \cdot 615 = 351{,}067$ ja Irmelin osuus $615 - 351{,}067 = 263{,}933$. Vastaus: Taiston osuus 351,07 euroa ja Irmelin 263,93 euroa.

2. Leikkauspisteissä on $5x^2 - x = 1 - x^2$ eli $6x^6 - x - 1 = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{1+24}) = \frac{1}{12}(1 \pm 5)$ eli $x = \frac{1}{2}$, jolloin $y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ tai $x = -\frac{1}{3}$, jolloin $y = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ja $(-\frac{1}{3}, \frac{8}{9})$.

3. Kyseisellä lapsiperheellä todennäköisyys auton käyttöön on $y = 0{,}4897 + 0{,}34d$. Kaupunkimaisessa asuinkunnassa $d = 0{,}78$, jolloin $y = 0{,}7549$ ja maaseutumaisessa asuinkunnassa $d = 1{,}01$, jolloin $y = 0{,}8331$. Vastaus: **a)** 75 %, **b)** 83 %.

4. Kaaret ovat yhteensä $2\pi 36$ m. Kummankin suoran pituus on $s = \frac{1}{2}(400 - 2\pi 36) = 86{,}9027$ m. Kahdeksannen radan kaarteen säde on $r = 36 + 7 \cdot 1{,}22 = 44{,}54$ m. Kahdeksannen radan pituus on $2\pi r + 2 \cdot s = 453{,}658$ m eli se on 53,658 m pitempi kuin sisärata. Ero on prosenteissa $100 \cdot \frac{53{,}658}{400} = 13{,}41$. Vastaus: Suorien pituus on 86,90 m ja kahdeksas rata on 53,66 m eli 13,4 % pitempi kuin sisärata.

5. Neste muodostaa lasin sisäpuolen kanssa yhdenmuotoisen kartion siten, että korkeuksien suhde on 1/2. Tällöin tilavuuksien suhde on $(1/2)^3 = 1/8$. Nesteen tilavuus on siten $1{,}75/8 = 0{,}21875$ dl. Vastaus: Lasissa on 0,219 dl nestettä.

6. Ääni etenee 35 sekunnissa $340 \cdot 35 = 11\,900$ m. Katsoja K, salama S ja salaman alapuolella oleva paikka P muodostavat suorakulmaisen kolmion, missä hypotenuusa $KS = 11\,900$. Salamanisku tapahtui korkeudella $PS = 11\,900 \sin 25^o \approx 5029{,}2$ m. Etäisyys $KP = 11\,900 \cos 25^o \approx 10\,785{,}1$ m. Vastaus: Salamanisku korkeudella 5000 m ja maanpintaetäisyydellä 10 800 m.

7. **a)** Vuositulosta 162 520 mk maksetaan tuloveroa $9\,540 + 0{,}25(162\,520 - 113\,000) = 21\,920$ mk valtiolle. **b)** Jos vuositulo olisi ollut 178 000, olisi pidätyksen jälkeen jäänyt alle 162 520 mk. Jos vuositulo olisi ollut 315 000, olisi pidätyksen jälkeen jäänyt yli 162 520 mk. Näin ollen vuositulo x on välillä 178 000 – 315 000. Vuositulolle saadaan tästä yhtälö $x - 162\,520 = 25\,790 + 0{,}31(x - 178\,000)$, jonka ratkaisu on $x = 192\,942{,}03$. Vastaus: **a)** 21 920 mk, **b)** 192 942 mk.

8. Jos kameran hinta vuonna 1997 oli x mk, oli vuonna 2000 hinta $0{,}88^3 x = 4200$. Tästä saadaan $x \approx 6163{,}1292$. Vuonna 2004 kamera maksaa markoissa $0{,}88^4 \cdot 4200 \approx 2518{,}7205$ ja euroissa $2518{,}7205/5{,}94573 \approx 423{,}6184$. Vastaus: Vuonna 1997 hinta oli 6163 mk ja vuonna 2004 hinta olisi 424 euroa.

9. Jos menomatka A:sta B:hen kestää a h ja paikkakuntien aikaero on b h, saadaan menomatkasta yhtälö $14\frac{10}{60} + a = 17 + b$ ja paluumatkasta $18\frac{55}{60} + a + 1 = 24 + 8\frac{45}{60} - b$. Tästä yhtälöparista saadaan, että $b = 5$. Siis kun kello on A:ssa 8.45, on se B:ssä $8.45 - 5 = 3.45$. Vastaus: Kello oli 3.45.

10. Jos tulpan kesto $x \sim N(25\,000,\, 2000)$, niin on määrättävä toimintavarmuusraja x_0 ehdosta $P(x \leq x_0) = 0{,}05$. Normeeratussa normaalijakaumassa ehto on $P(z \leq z_0) = 0{,}05$, missä $z = (x - 25\,000)/2000$ ja $z_0 = (x_0 - 25\,000)/2000$. Koska $\Phi(1{,}645) = 0{,}95$, on $z_0 = -1{,}645$. Siis $x_0 = 2000z_0 + 25\,000 = 21\,710$. Vastaus: 21 700 km jälkeen.

11. Jos $p'(x) > 0$ välillä I, on $p(x)$ kasvava välillä I. Jos $p'(x) < 0$ välillä I, on $p(x)$ vähenevä välillä I. Jos $p'(x_0) = 0$ ja $p'(x)$ on erimerkkinen x_0:n eri puolilla, on $p(x)$:llä pisteessä x_0 ääriarvokohta. Polynomin $f(x)$ derivaatta on toisen asteen polynomi $15x^2 + 13x + 3$. Sen diskriminantti on $13^2 - 12 \cdot 15 = -11 < 0$, joten polynomilla $f'(x)$ ei ole reaalisia nollakohtia. Koska $f'(0) > 0$, on $f'(x) > 0$ aina. Näin ollen $f(x)$ on kaikkialla kasvava.

12. Vuoto poistaa vuorokaudessa 10 % jäähdytysnesteestä ja samoin 10 % pakkasnesteestä. Pakkasnesteen litramäärä on maanantaina 4, päivän päästä $0{,}9 \cdot 4$, kahden päivän päästä $0{,}9^2 \cdot 4$ ja viikon päästä $0{,}9^7 \cdot 4 \approx 1{,}9132$. Pitoisuus on 19,1 %. Neljän viikon päästä pakkasnestettä olisi $0{,}9^{28} \cdot 4 \approx 0{,}2093$ litraa eli pitoisuus olisi 2,09 %. Vastaus: Viikon päästä 19 % ja neljän viikon päästä 2,1 %.

13. **a)** Funktion derivaatta on $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. $f'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Funktion suurin ja pienin arvo löytyvät välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Koska $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ ja $f(2) = 4$, on $f(x)$:n suurin arvo 4 ja pienin arvo -1. **b)** Funktio $g(x) = f(x) + a$. Näin ollen sen pienin arvo on $g(1) = -1 + a = -4\frac{1}{2}$. Tästä saadaan $a = -3\frac{1}{2}$. Funktion suurin arvo on $g(2) = 4 + a = \frac{1}{2}$.

14. Kertasijoitukseksi tulee $s = 0{,}98 \cdot 60 - 1{,}35 = 57{,}45$. Säästösumma ensimmäisen vuoden jälkeen on $a = 12s + (12 + 11 + 10 + ... + 1)\frac{1}{12} \cdot 0{,}044s = 705{,}83$. Merkitään $q = 1{,}044$. Säästösumma on toisen vuoden jälkeen $a_2 = qa + a$, kolmannen jälkeen $a_3 = qa_2 + a = q^2a + qa + a$ ja lopulta kahdeksannen jälkeen $a_8 = q^7a + q^6a + ... + a = a \cdot \dfrac{1-q^8}{1-q}$. Sijoittamalla a:n ja q:n arvot saadaan säästösummaksi $a_8 = 6597{,}11$ euroa. Puhdas tuotto on $0{,}71 \cdot (a_8 - 8 \cdot 12 \cdot 60) = 594{,}35$ euroa.

15. Jos todennäköisyys, että hissi on 1. kerroksessa on $2a$, on minkä muun kerroksen tahansa todennäköisyys a. Todennäköisyyksien summa on $6a = 1$, joten $a = 1/6$. Lasketaan matka-ajan odotusarvot. A:n tapauksessa hissi on paikalla todennäköisyydellä $1/6$ ja hissillä ajoon kuluu aikaa $4 \cdot 5 + 4 = 24$ s. Kävelyyn kuluu aikaa $4 \cdot 8 = 32$ s. A:n matka-ajan odotusarvo on $\frac{1}{6} \cdot 24 + \frac{5}{6} \cdot 32 \approx 30{,}7$ s. B:n tapauksessa hissi voi alussa olla missä kerroksessa tahansa. Jos se on kerroksessa k, on matka-aika $5 \cdot (5-k) + 24$ s. B:n matka-ajan odotusarvoksi saadaan $\frac{2}{6} \cdot 44 + \frac{1}{6} \cdot (39 + 34 + 29 + 24) = 35{,}7$ s. C:n tapauksessa matka-aika on aina 32 s. Vastaus: A:n matka-ajan odotusarvo on pienin.