

Lyhyt matematiikka 27.9.2002, ratkaisut:

1. Aviopuolisoiden palkkojen summa on 3155 euroa. Taiston osuus laskusta on siten $\frac{1801}{3155} \cdot 615 = 351,067$ ja Irmelin osuus $615 - 351,067 = 263,933$. Vastaus: Taiston osuus 351,07 euroa ja Irmelin 263,93 euroa.
2. Leikkauspisteissä on $5x^2 - x = 1 - x^2$ eli $6x^2 - x - 1 = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{1 + 24}) = \frac{1}{12}(1 \pm 5)$ eli $x = \frac{1}{2}$, jolloin $y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ tai $x = -\frac{1}{3}$, jolloin $y = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ja $(-\frac{1}{3}, \frac{8}{9})$.
3. Kyseisellä lapsiperheellä todennäköisyys auton käyttöön on $y = 0,4897 + 0,34d$. Kaupunkimaisessa asuinkunnassa $d = 0,78$, jolloin $y = 0,7549$ ja maaseutumaisessa asuinkunnassa $d = 1,01$, jolloin $y = 0,8331$. Vastaus: **a)** 75 %, **b)** 83 %.
4. Kaaret ovat yhteensä $2\pi 36$ m. Kummankin suoran pituus on $s = \frac{1}{2}(400 - 2\pi 36) = 86,9027$ m. Kahdeksannen radan kaarteeseen säde on $r = 36 + 7 \cdot 1,22 = 44,54$ m. Kahdeksannen radan pituus on $2\pi r + 2 \cdot s = 453,658$ m eli se on 53,658 m pitempi kuin sisärata. Ero on prosenteissa $100 \cdot \frac{53,658}{400} = 13,41$. Vastaus: Suorien pituus on 86,90 m ja kahdeksas rata on 53,66 m eli 13,4 % pitempi kuin sisärata.
5. Neste muodostaa lasin sisäpuolen kanssa yhdenmuotoisen kartion siten, että korkeuksien suhde on $1/2$. Tällöin tilavuuksien suhde on $(1/2)^3 = 1/8$. Nesteen tilavuus on siten $1,75/8 = 0,21875$ dl. Vastaus: Lasissa on 0,219 dl nestettä.
6. Ääni etenee 35 sekunnissa $340 \cdot 35 = 11900$ m. Katsoja K , salama S ja salaman alapuolella oleva paikka P muodostavat suorakulmaisen kolmion, missä hypotenuusa $KS = 11900$. Salamanisku tapahtui korkeudella $PS = 11900 \sin 25^\circ \approx 5029,2$ m. Etäisyys $KP = 11900 \cos 25^\circ \approx 10785,1$ m. Vastaus: Salamanisku korkeudella 5000 m ja maanpintaetäisyydellä 10800 m.
7. **a)** Vuositulosta 162520 mk maksetaan tuloveroa $9540 + 0,25(162520 - 113000) = 21920$ mk valtiolle. **b)** Jos vuositulo olisi ollut 178000, olisi pidätyksen jälkeen jäänyt alle 162520 mk. Jos vuositulo olisi ollut 315000, olisi pidätyksen jälkeen jäänyt yli 162520 mk. Näin ollen vuositulo x on välillä 178000 – 315000. Vuositulolle saadaan tästä yhtälö $x - 162520 = 25790 + 0,31(x - 178000)$, jonka ratkaisu on $x = 192942,03$. Vastaus: **a)** 21920 mk, **b)** 192942 mk.
8. Jos kameran hinta vuonna 1997 oli x mk, oli vuonna 2000 hinta $0,88^3 x = 4200$. Tästä saadaan $x \approx 6163,1292$. Vuonna 2004 kamera maksaa markkoissa $0,88^4 \cdot 4200 \approx 2518,7205$ ja euroissa $2518,7205/5,94573 \approx 423,6184$. Vastaus: Vuonna 1997 hinta oli 6163 mk ja vuonna 2004 hinta olisi 424 euroa.
9. Jos menomatka A:sta B:hen kestää a h ja paikkakuntien aikaero on b h, saadaan menomatka yhtälö $14\frac{10}{60} + a = 17 + b$ ja paluumatkasta $18\frac{55}{60} + a + 1 = 24 + 8\frac{45}{60} - b$. Tästä yhtälöparista saadaan, että $b = 5$. Siis kun kello on A:ssa 8.45, on se B:ssä $8.45 - 5 = 3.45$. Vastaus: Kello oli 3.45.

10. Jos tulpan kesto $x \sim N(25\,000, 2000)$, niin on määrättävä toimintavarmuusraja x_0 ehdosta $P(x \leq x_0) = 0,05$. Normeeratussa normaalijakaumassa ehto on $P(z \leq z_0) = 0,05$, missä $z = (x - 25\,000)/2000$ ja $z_0 = (x_0 - 25\,000)/2000$. Koska $\Phi(1,645) = 0,95$, on $z_0 = -1,645$. Siis $x_0 = 2000z_0 + 25\,000 = 21\,710$. Vastaus: 21 700 km jälkeen.
11. Jos $p'(x) > 0$ välillä I , on $p(x)$ kasvava välillä I . Jos $p'(x) < 0$ välillä I , on $p(x)$ vähenevä välillä I . Jos $p'(x_0) = 0$ ja $p'(x)$ on erimerkkinen x_0 :n eri puolilla, on $p(x)$:llä pisteessä x_0 ääriarvokohta. Polynomien $f(x)$ derivaatta on toisen asteen polynomi $15x^2 + 13x + 3$. Sen diskriminantti on $13^2 - 12 \cdot 15 = -11 < 0$, joten polynomilla $f'(x)$ ei ole reaalisia nollakohtia. Koska $f'(0) > 0$, on $f'(x) > 0$ aina. Näin ollen $f(x)$ on kaikkialla kasvava.
12. Vuoto poistaa vuorokaudessa 10 % jäähdytysnesteestä ja samoin 10 % pakkasnestestä. Pakkasnesteen litramäärä on maanantaina 4, päivän päästä $0,9 \cdot 4$, kahden päivän päästä $0,9^2 \cdot 4$ ja viikon päästä $0,9^7 \cdot 4 \approx 1,9132$. Pitoisuus on 19,1 %. Neljän viikon päästä pakkasnestettä olisi $0,9^{28} \cdot 4 \approx 0,2093$ litraa eli pitoisuus olisi 2,09 %. Vastaus: Viikon päästä 19 % ja neljän viikon päästä 2,1 %.
13. a) Funktion derivaatta on $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$. $f'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Funktion suurin ja pienin arvo löytyvät välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Koska $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ ja $f(2) = 4$, on $f(x)$:n suurin arvo 4 ja pienin arvo -1 . b) Funktio $g(x) = f(x) + a$. Näin ollen sen pienin arvo on $g(1) = -1 + a = -4\frac{1}{2}$. Tästä saadaan $a = -3\frac{1}{2}$. Funktion suurin arvo on $g(2) = 4 + a = \frac{1}{2}$.
14. Kertasijoitukseksi tulee $s = 0,98 \cdot 60 - 1,35 = 57,45$. Säästösumma ensimmäisen vuoden jälkeen on $a = 12s + (12 + 11 + 10 + \dots + 1)\frac{1}{12} \cdot 0,044s = 705,83$. Merkitään $q = 1,044$. Säästösumma on toisen vuoden jälkeen $a_2 = qa + a$, kolmannen jälkeen $a_3 = qa_2 + a = q^2a + qa + a$ ja lopulta kahdeksannen jälkeen $a_8 = q^7a + q^6a + \dots + a = a \cdot \frac{1 - q^8}{1 - q}$. Sijoittamalla a :n ja q :n arvot saadaan säästösummaksi $a_8 = 6597,11$ euroa. Puhdas tuotto on $0,71 \cdot (a_8 - 8 \cdot 12 \cdot 60) = 594,35$ euroa.
15. Jos todennäköisyys, että hissi on 1. kerroksessa on $2a$, on minkä muun kerroksen tahansa todennäköisyys a . Todennäköisyyksien summa on $6a = 1$, joten $a = 1/6$. Lasketaan matka-ajan odotusarvot. A:n tapauksessa hissi on paikalla todennäköisyydellä $1/6$ ja hissillä ajoon kuluu aikaa $4 \cdot 5 + 4 = 24$ s. Kävelyyn kuluu aikaa $4 \cdot 8 = 32$ s. A:n matka-ajan odotusarvo on $\frac{1}{6} \cdot 24 + \frac{5}{6} \cdot 32 \approx 30,7$ s. B:n tapauksessa hissi voi alussa olla missä kerroksessa tahansa. Jos se on kerroksessa k , on matka-aika $5 \cdot (5 - k) + 24$ s. B:n matka-ajan odotusarvoksi saadaan $\frac{2}{6} \cdot 44 + \frac{1}{6} \cdot (39 + 34 + 29 + 24) = 35,7$ s. C:n tapauksessa matka-aika on aina 32 s. Vastaus: A:n matka-ajan odotusarvo on pienin.