Pitkä matematiikka 27.9.2002, ratkaisut:

1. **a)** Kolmion kärkipisteet ovat suorien $y = 2x$ ja $y = -\frac{1}{2}x$ leikkauspiste $A = (0,0)$, suorien $y = 2x$ ja $y = 3 - x$ leikkauspiste $B = (1,2)$ ja suorien $y = 3 - x$ ja $y = -\frac{1}{2}x$ leikkauspiste $C = (6,-3)$. **b)** Kolmion sivujen pituudet ovat $AB = \sqrt{5}$, $AC = 3\sqrt{5}$ ja $BC = 5\sqrt{2}$.

2. Jos Helsingin ja Lappeenrannan välisen junaradan pituus on s ja matka-aika vuonna 1960 oli t_1, niin keskinopeus vuonna 1960 oli $v_1 = s/t_1$. Matka-aika nyt on $t_2 = (1 - 0{,}37)t_1 = 0{,}63t_1$, joten nykyinen keskinopeus on $v_2 = s/(0{,}63t_1)$. Keskinopeuden nousu prosenteissa on $100(v_2/v_1 - 1) = 58{,}7$. Vastaus: 59 %.

3. Funktion $f(x) = Ae^x + 2Be^{-x}$ derivaatta on $f'(x) = Ae^x - 2Be^{-x}$. Koska $f(0) = 1$ ja $f'(0) = 2$, on oltava $A + 2B = 1$ ja $A - 2B = 2$. Yhtälöparin ratkaisu on $A = 3/2$, $B = -1/4$.

4. **a)** $\dfrac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}} = \dfrac{\frac{a^2+b^2}{a}}{\frac{b^2+a^2}{b}} = \dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \dfrac{b}{a}$. **b)** $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{t} + t)^2 - \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{t} - t)^2 = \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{t^2} + 2 + t^2 - \dfrac{1}{t^2} + 2 - t^2) = \dfrac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

5. Suora on normaalivektoria vastaan kohtisuoran vektorin $3\bar{i} - 2\bar{j}$ suuntainen, joten sen kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$. Suoran yhtälö on $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ eli $2x + 3y - 11 = 0$. Pisteen $(2,2)$ etäisyys suorasta on $\dfrac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \approx 0{,}277$. Vastaus: $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

6. Koska $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, saadaan sinilauseesta $\dfrac{5}{\sin\alpha} = \dfrac{8}{2\sin\alpha\cos\alpha}$. Tästä ratkeaa $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ja edelleen $\alpha \approx 36{,}8699^\circ$. Kolmannelle sivulle x saadaan kosinilauseesta yhtälö $5^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x\cos\alpha$ eli $5x^2 - 64x + 195 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $x = \frac{39}{5}$ ja $x = 5$. Jälkimmäinen ratkaisu hylätään, sillä se johtaa tasakylkiseen kolmioon, joka ei toteuta alkuehtoja. Vastaus: Kolmannen sivun pituus on $\frac{39}{5}$ ja $\alpha \approx 36{,}9^\circ$.

7. Särmien keskipisteiden A', B', C' kautta kulkeva taso rajaa säännöllisen tetraedrin $A'B'C'D$, jonka särmän pituus on $\frac{1}{2}a$. $ABCD$:n tasosta erottama osa $A'B'C'$ on tasasivuinen kolmio, jonka pinta-ala on $\frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a = a^2\frac{\sqrt{3}}{16}$. Vastaus: $a^2\frac{\sqrt{3}}{16}$.

8. Janan AC suuntaisen suoran kulmakerroin on $\frac{2}{3}$, joten B on suoralla S, $y = \frac{2}{3}x + b$. Toisaalta B on sen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on AC. Suorakulmion ala on suurin, kun B on kauimpana janasta AC. Näin tapahtuu, kun B:n etäisyys janasta AC on $\frac{1}{2}AC = \sqrt{13}$. Pisteen $A = (0,0)$ etäisyys suorasta S on myös $\sqrt{13}$. Tästä saadaan b:lle yhtälö $\frac{|b|}{\sqrt{(2/3)^2+1}} = \sqrt{13}$ eli $|b| = \frac{13}{3}$ eli $b = \pm\frac{13}{3}$. Kysytyt suorat ovat siten $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ ja $y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$.

9. Leena pääsee ratsastamaan heitolla 1 todennäköisyydellä 1/2. Sari pääsee ratsastamaan heitolla 2 todennäköisyydellä $(1/2)^2$. Leena pääsee ratsastamaan heitolla 3 todennäköisyydellä $(1/2)^3$. Sari pääsee ratsastamaan heitolla 4 todennäköisyydellä $(1/2)^4$. Näin jatkamalla nähdään, että Leenalla on aina heitolla $2n+1$ mahdollisuus päästä ratsastamaan todennäköisyydellä $(1/2)^{2n+1}$ ja Sarilla heitolla $2n$ todennäköisyydellä $(1/2)^{2n}$. Ratsastustodennäköisyydet ovat siten geometrisen sarjan summia, Leenalla $\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$ ja Sarilla $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^{2n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3}$.

10. Kun $a = 0$, saadaan 1. asteen yhtälö $2x+1=0$, jonka ratkaisu on $x = -\frac{1}{2}$. Kun $a \neq 0$, $|a| < 1$, on yhtälöllä ratkaisut $x_1 = \frac{1}{a}(-1+\sqrt{1-a})$ ja $x_2 = \frac{1}{a}(-1-\sqrt{1-a})$. Edelleen $x_1 = \dfrac{(\sqrt{1-a}-1)(\sqrt{1-a}+1)}{a(\sqrt{1-a}+1)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-a}+1}$. Koska $\lim_{a\to 0}\sqrt{1-a} = 1$, on $\lim_{a\to 0} x_1 = -\frac{1}{2}$. Tämä on arvolla $a = 0$ saadun yhtälön ratkaisu. Selvästi $0 > -1-\sqrt{1-a} \to -2$ kun $a \to 0$ ja $a > 0$ tai $a < 0$. Näin ollen $\lim_{a\to 0} x_2 = \pm\infty$, eikä kumpikaan ole arvolla $a = 0$ saadun yhtälön ratkaisu.

11. Rekursiokaavan mukaan $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$. Vastaavasti saadaan $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ ja $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$. Pisteessä -1 on $T_0(-1) = 1$, $T_1(-1) = -1$ ja $T_2(-1) = 1$. Osoitetaan induktiolla, että $T_n(-1) = (-1)^n$, $n \in N$. Väite pätee kun $n = 0, 1, 2$. Jos väite pätee arvoon n asti, antaa rekursiokaava $T_{n+1}(-1) = -2T_n(-1) - T_{n-1}(-1) = -2(-1)^n - (-1)^{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, mikä todistaa väitteen. Pisteessä 0 on $T_0(0) = 1$, $T_1(0) = 0$, $T_2(0) = -1$ ja $T_3(0) = 0$. Rekursiokaavan mukaan $T_{n+2}(0) = -T_n(0)$. Tästä seuraa induktiolla, että $T_{2n}(0) = (-1)^n$ ja $T_{2n+1}(0) = 0$, kun $n \in N$. Pisteessä 1 on $T_0(1) = T_1(1) = T_2(1) = 1$. Induktio $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2 - 1 = 1$ osoittaa, että $T_n(1) = 1$, $n \in N$.

12. Olkoon O pohjaympyrän keskipiste, AB pystysuoran tason ja pohjaympyrän leikkaus sekä C janan AB keskipiste. Olkoon r pohjaympyrän säde ja $x = CO$ sekä $d_x = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$. Tällöin em. tason ja rakennuksen leikkauskuvion ala on $A_x = 2d_x d_x = 2(r^2 - x^2)$. Rakennuksen tilavuus on $V = 2\int_0^r A_x dx = 4\int_0^r r^2 - x^2 dx = 4\Big/_0^r r^2x - \frac{1}{3}x^3 = \frac{8}{3}r^3$. Kun $2r = 19{,}7$ m, on $V = 2548{,}46$ m^3. Vastaus: 2550 m^3.

13. Irrationaaliluku on reaaliluku, joka ei ole muotoa $\frac{p}{q}$, missä $p, q \in Z$. Jos $\log_2 n$ ei ole irrationaaliluku, on olemassa positiiviset kokonaisluvut p ja q siten, että $\log_2 n = \frac{p}{q}$ eli $2^{p/q} = n$ eli $2^p = n^q$. Koska n on pariton, on n^q pariton. Toisaalta 2^p on parillinen. On jouduttu ristiriitaan, joten oletus oli väärä. Siis $\log_2 n$ on irrationaaliluku.

14. **a)** $(1-i)(2+3i) = 2 + 3i - 2i - 3(-1) = 5 + i$. **b)** $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$. **c)** $\dfrac{5+i}{1-i} = \dfrac{5-1}{1+1} + i\dfrac{1-(-5)}{1+1} = 2 + 3i$.

15. Lasketaan Simpsonin säännöllä $\int_0^1 f(t)dt$, missä $f(t) = e^{-t^2/2}$. **a)** Neljän osavälin Simpsonin kaava on nyt $\int_0^1 f(t)dt \approx S_4 = \frac{1}{12}(f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{2}{4}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1))$. Sijoittamalla f:n lauseke saadaan $S_4 \approx 0{,}855651$. Näin ollen $\Phi(1) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_4 \approx 0{,}841355$. **b)** Kun kahdeksan osavälin Simpsonin kaavaan $S_8 = \frac{1}{24}(f(0) + 4f(\frac{1}{8}) + 2f(\frac{2}{8}) + 4f(\frac{3}{8}) + 2f(\frac{4}{8}) + 4f(\frac{5}{8}) + 2f(\frac{6}{8}) + 4f(\frac{7}{8}) + f(1))$ sijoitetaan f:n lauseke saadaan $S_8 \approx 0{,}855626$. Tämän mukaan $\Phi(1) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_8 \approx 0{,}841345$. Koska kumpikin kaava antaa $\Phi(1)$:n likiarvoon samat neljä ensimmäistä desimaalia, voisi arvioida niiden olevan oikeita. (Taulukkokirjan mukaan $\Phi(1) \approx 0{,}8413$.)