



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Olkoon  $f(x) = x^2 - 3x - 5$ . **a)** Ratkaise yhtälö  $f(x) = 0$ . **b)** Millä  $x$ :n arvoilla on  $f'(x) = 1$ ? **c)** Piirrä derivaattafunktion  $f'$  kuvaaja.
2. Neljäkkään sivu on tasan 5 cm, ja lävistäjien pituuksien suhde on 2:1. Laske neljäkkään ala.
3. **a)** Derivoi funktio  $f(x) = e^{2x-2} + x^3 - 1$ . **b)** Määritä käyrän  $y = e^{2x-2} + x^3 - 1$  pisteeseen  $(1, 1)$  piirretyn tangentin yhtälö. **c)** Määritä sen janan pituus, jonka koordinaattiakselit erottavat edellisen kohdan tangentista.
4. Mistä  $xy$ -tason pisteestä pisteisiin  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (1, -2)$ ,  $C = (2, 1)$ ,  $D = (2, 3)$  ja  $E = (-2, -2)$  piirrettyjen vektoreiden summa on nollavektori?
5. Päärynämehestä ja omenamehestä tehdyn sekamehun sokeripitoisuus on 11 %. Määritä mehujen sekoitussuhde, kun päärynämehestä sokeripitoisuus on 14 % ja omenamehestä 7 %.
6. Määritä  $\sin(x - y)$ , kun  $\sin x = \frac{1}{4}$ ,  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , ja  $\cos y = -\frac{1}{3}$ ,  $\pi \leq y \leq 2\pi$ . Tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.
7. Tasasivuinen kolmio  $T_0$  kiertyy tasossa keskipisteensä ympäri kulman  $\alpha$  verran, jolloin se muuttuu kolmioksi  $T_\alpha$ . Laske sen alueen ala, jonka kolmiot  $T_0$  ja  $T_\alpha$  yhteensä peittävät (ts. unioni  $T_0 \cup T_\alpha$  peittää), kun kolmion sivu on  $a$  ja kulma  $\alpha$  on **a)**  $60^\circ$ , **b)**  $120^\circ$ , **c)**  $180^\circ$ . Piirrä kuvat.
8. Erään satunnaismuuttujan  $x$  tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{5}x, & \text{kun } 0 \leq x < 2, \\ -\frac{2}{15}x + \frac{2}{3}, & \text{kun } 2 \leq x < 5, \\ 0, & \text{kun } x \geq 5. \end{cases}$$

**a)** Piirrä tiheysfunktion kuvaaja. **b)** Laske todennäköisyydet  $P(x \leq 1)$ ,  $P(1 < x \leq 3)$  ja  $P(x > 3)$ .

9. Osoita, että kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

missä  $a$  on kolmion mielivaltainen sivu ja  $\alpha$  sen vastainen kulma.

10. Piirrä funktion  $f(x) = |\ln|x - 2||$  kuvaaja. Millä väleillä funktio kasvaa ja millä se vähenee? Esitä funktio kullakin välillä siten, että lausekkeissa ei esiinny itseisarvoja. Millä  $x$ :n arvoilla funktio saa pienimmän arvonsa?

KÄÄNNÄ!

- 11.** Osoita, että lauseke

$$\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2,$$

missä  $a_k$ :t ovat annettuja reaalilukuja, saa pienimmän arvonsa, kun  $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ . Lausu tämä pienin arvo lukujen  $a_k$  avulla mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa.

- 12.** Isä tallettaa poikansa tilille joka kuukauden alussa 200 € vuodenvaihteessa tapahtuneesta syntymästä alkaen. Tilille maksetaan 1,5 % vuotuista korkoa, joka liitetään pääomaan aina vuoden lopussa. **a)** Kuinka paljon rahaa tilillä on, kun poika täyttää 18 vuotta? **b)** Kuinka kauan isän olisi talletettava, jotta tilillä olisi rahaa kaksi kertaa kaksion hinnaksi oletetaan 135 000 €?

- 13.** Käyrän  $y = \ln x$  välillä  $1 \leq x \leq e$  oleva osa pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Määritä muodostuneen kappaleen tilavuus.

- 14.** Jatkuvan funktion  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  keskiarvo välillä  $[0, x]$  ( $x > 0$ ) määritellään seuraavasti:

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Määritä keskiarvofunktion derivaatta  $G'(x)$  ja lausu se funktionarvojen  $f(x)$  ja  $G(x)$  avulla. Osoita, että  $G(x) \leq f(x)$ , jos  $f$  on kasvava. Osoita edelleen, että tällöin myös  $G$  on kasvava.

- 15.** **a)** Totea, että differentiaaliyhtälön  $y' + 2 \sin x = y$  ratkaisu alkuehdolla  $y(0) = 1$  on  $y(x) = \sin x + \cos x$ . **b)** Määritä Eulerin menetelmällä kyseisen ratkaisun likiarvot  $y_i$  ( $\approx y(x_i)$ ) välillä  $[0, 2]$  askelpituudella  $h = 0,5$  sekä laadi taulukko, jossa esiintyvät  $x_i$ ,  $y(x_i)$ ,  $y_i$  ja virhe  $y_i - y(x_i)$ .