

Pitkä matematiikka 24.9.2003, ratkaisut:

- 1. a)** $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{29})$. **b)** $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$. **c)** Kuvaaja on suora pisteiden $(0, -3)$ ja $(\frac{3}{2}, 0)$ kautta.
- Neljäkkään $ABCD$ lävistäjät ovat kohtisuorat. Olkoon niiden leikkauspiste E , $AE = x$ ja $BE = 2x$. Koska kolmio AEB on suorakulmainen, on $x^2 + (2x)^2 = 5^2$ eli $5x^2 = 25$, josta $x = \sqrt{5}$. Neljäkkään ala on $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = 20$. Vastaus: 20 cm^2 .
- 3. a)** $f'(x) = 2e^{2x-2} + 3x^2$. **b)** Koska $f'(1) = 2e^0 + 3 = 5$, on käyrän pisteeseen $(1, 1)$ piirretyn tangentin yhtälö $y - 1 = 5(x - 1)$ eli $y = 5x - 4$. **c)** Tangentti leikkaa akseleita pisteissä $(0, -4)$ ja $(\frac{4}{5}, 0)$. Näiden välisen janan pituus on $\sqrt{(\frac{4}{5})^2 + 4^2} = \frac{4}{5}\sqrt{26}$.
- Olkoon $P = (x, y)$. Tällöin $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} + \overline{PE} = (-1 - x)\bar{i} + (1 - y)\bar{j} + (1 - x)\bar{i} + (-2 - y)\bar{j} + (2 - x)\bar{i} + (1 - y)\bar{j} + (2 - x)\bar{i} + (3 - y)\bar{j} + (-2 - x)\bar{i} + (-2 - y)\bar{j} = (2 - 5x)\bar{i} + (1 - 5y)\bar{j}$. Tämä on nollavektori, kun $2 - 5x = 0$ ja $1 - 5y = 0$ eli $x = \frac{2}{5}$ ja $y = \frac{1}{5}$. Vastaus: Pisteestä $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.
- Jos seoksessa on päärynämehua $100a$ ja omenamehua $100b$, on seoksessa sokeria $14a + 7b$. Toisaalta seoksessa on sokeria $\frac{11}{100}(100a + 100b)$ eli $11a + 11b$. Tästä saadaan yhteys $14a + 7b = 11a + 11b$ eli $3a = 4b$ eli $a/b = 4/3$. Vastaus: Neljä osaa päärynämehua ja kolme osaa omenamehua.
- Jos $|x| \leq \pi/2$ ja $\pi \leq y \leq 2\pi$, on $\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x}$ ja $\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$. Siis $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) - \sqrt{\frac{15}{16}}\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{30}-1}{12} \approx 0,83$.
- 7. a)** Unioni $T_0 \cup T_{60^\circ}$ on kuusisakarainen tähti, missä kukin sakara on tasasivuinen kolmio, jonka sivuksi saadaan $\frac{1}{3}a$. Unionin ala on T_0 :n ala lisättynä kolmen sakaran alalla eli on $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{4}(\frac{1}{3}a)^2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2$. **b)** Unioni $T_0 \cup T_{120^\circ} = T_0$, joten sen ala on $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. **c)** Unioni $T_0 \cup T_{180^\circ} = T_0 \cup T_{60^\circ}$, joten sen ala on a)-kohdan mukaan $\frac{1}{\sqrt{3}}a^2$.
- 8. a)** Olkoon $O = (0, 0)$, $A = (2, \frac{2}{5})$ ja $B = (5, 0)$. Tiheysfunktion kuvaaja koostuu välillä $[0, 5]$ janoista OA ja AB sekä muualla x -akselista. **b)** $P(x \leq 1)$ on sen kolmion ala, jonka kärjet ovat O , $(1, 0)$ ja $(1, \frac{1}{5})$. Siis $P(x \leq 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{10}$. $P(x > 3)$ on sen kolmion ala, jonka kärjet ovat $(3, 0)$, $(3, \frac{4}{15})$ ja B . Siis $P(x > 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot 2 = \frac{4}{15}$. $P(1 < x \leq 3) = 1 - P(x \leq 1) - P(x > 3) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{19}{30}$.
- Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja R säde. Jos sivu $BC = a$, on $\angle BAC = \alpha$. Vastaava keskuskulma $BOC = 2\alpha$. Leikatkaa 2α :n puolittaja BC :n pisteessä D . Kolmio ODC on suorakulmainen, hypotenuusa $OC = R$ ja α :n vastainen kateetti $DC = \frac{1}{2}a$. Siis $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ eli $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$, mikä piti todistaa.

- 10.** $\ln y > 0$, kun $y > 1$, $\ln y = 0$, kun $y = 1$ ja $\ln y < 0$, kun $0 < y < 1$. Edelleen, $|x - 2| = x - 2 > 1$, kun $x > 3$, $0 < |x - 2| = x - 2 \leq 1$, kun $2 < x \leq 3$ sekä $|x - 2| = 2 - x > 1$, kun $x < 1$ ja $0 < |x - 2| = 2 - x \leq 1$, kun $1 \leq x < 2$. Siis $f(x)$ on $\ln(2 - x)$, kun $x < 1$, $-\ln(2 - x)$, kun $1 \leq x < 2$, $-\ln(x - 2)$, kun $2 < x \leq 3$ ja on $\ln(x - 2)$, kun $x > 3$. Selvästi $f(x) \geq 0$ ja on nolla, kun $x = 1$ ja kun $x = 3$. Funktio saa siis pienimmän arvonsa arvoilla $x = 1$ ja $x = 3$. Derivaatta $f'(x) > 0$, kun $1 < x < 2$ ja kun $x > 3$, joten $f(x)$ on näillä väleillä kasvava. $f'(x) < 0$, kun $x < 1$ ja kun $2 < x < 3$, joten $f(x)$ on näillä väleillä vähenevä.
- 11.** $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x^2 - 2a_k x + a_k^2) = nx^2 - 2x \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k^2$. Tämä on ylöspäin aukeava paraabeli, joka saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa. Koska $f'(x) = 2nx - 2 \sum_{k=1}^n a_k$, on $f'(x) = 0$, kun $nx - \sum_{k=1}^n a_k = 0$ eli kun $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Tämä on juuri väitetty pienimmän arvon kohta. Pienin arvo on $f(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k) = \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^n a_k)^2 - 2 \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^n a_k)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 - \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^n a_k)^2$.
- 12.** Korkotekijä $q = 1,015$. Ensimmäisen vuoden korko on $200 \cdot 0,015 \cdot (12 + 11 + \dots + 1) / 12 = 19,5$. Pääoma ensimmäisen vuoden jälkeen on $K = 12 \cdot 200 + 19,5 = 2419,5$, toisen vuoden jälkeen $(1 + q)K$, kolmannen vuoden $(1 + q + q^2)K$ jne. **a)** Kun poika täyttää 18 vuotta, on tilillä rahaa $(1 + q + q^2 + \dots + q^{17})K = K \frac{1 - q^{18}}{1 - q} \approx 49\,574,0446$. **b)** Jos kaksioon on talletettava n vuotta, on $K \frac{1 - q^n}{1 - q} = 135\,000$, josta $q^n = 1 + \frac{q - 1}{K} \cdot 135\,000$ eli $n = \frac{1}{\ln q} \ln(1 + \frac{q - 1}{K} \cdot 135\,000) \approx 40,84$. Vastaus: a) 49574,04 euroa, b) 41 vuotta.
- 13.** Tilavuus $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$. Osittaisintegrointi antaa $V = \pi (\int_1^e x (\ln x)^2 - 2 \int_1^e \ln x dx) = \pi (e - 2(\int_1^e x \ln x - \int_1^e dx)) = \pi (e - 2e + 2(e - 1)) = \pi(e - 2)$.
- 14.** Jos $F(x) = \int f(t) dt$, on $G(x) = \frac{1}{x}(F(x) - F(0))$ ja $G'(x) = -\frac{1}{x^2}(F(x) - F(0)) + \frac{1}{x}(F'(x) - 0) = -\frac{1}{x}G(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}(f(x) - G(x))$. Jos f on kasvava, on $f(x) \geq f(t)$ kaikilla $t \leq x$. Tällöin $\int_0^x f(t) dt \leq f(x) \int_0^x dt = xf(x)$ eli $f(x) \geq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = G(x)$. Tämän perusteella $G'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - G(x)) \geq 0$, joten myös G on kasvava.
- 15. a)** $y'(x) = \cos x - \sin x$, joten $y'(x) + 2 \sin x = \cos x + \sin x = y(x)$. Lisäksi $y(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$. Siis $y(x)$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu annetulla alkuehdolla. **b)** Yhtälön Eulerin menetelmä on $y_0 = 1, x_0 = 0, y_{i+1} = y_i + h(y_i - 2 \sin x_i), i = 0, 1, 2, \dots$ Kun $h = 0,5$, on laskettava $y_{i+1} = 1,5y_i - \sin x_i, i = 0, 1, 2, 3$. Kysytyiksi arvoiksi saadaan

x_i	$y(x_i)$	y_i	$y_i - y(x_i)$
0	1	1	0
0,5	1,3570	1,5	0,1430
1,0	1,3818	1,7706	0,3888
1,5	1,0682	1,8144	0,7462
2,0	0,4931	1,7241	1,2309