

Lyhyt matematiikka 24.9.2004, ratkaisut:

- $x^2 - 3,1x - 1,4 = 0$, kun $x = \frac{1}{2}(3,1 \pm \sqrt{3,1^2 + 4 \cdot 1,4}) = \frac{1}{2}(3,1 \pm 3,9)$ eli $x = -0,4$ tai $x = 3,5$. Koska $f(x)$:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa negatiivisia arvoja välillä $] -0,4; 3,5[$.
- Nyt $a = 26 \cdot 10^{10} = 2,6 \cdot 10^{11}$, $b = 780 \cdot 10^{10} = 7,8 \cdot 10^{12}$, $c = 3900 \cdot 10^{10} = 3,9 \cdot 10^{13}$.
Siis $\frac{a+b+c}{a} = \frac{(26+780+3900) \cdot 10^{10}}{26 \cdot 10^{10}} = \frac{4706}{26} = 181$ ja
 $\frac{ab}{c} = \frac{2,6 \cdot 7,8 \cdot 10^{23}}{3,9 \cdot 10^{13}} = \frac{2,6 \cdot 7,8 \cdot 10^{10}}{3,9} = 5,2 \cdot 10^{10}$.
- Kuvaajan perusteella vastaukset ovat osapuilleen: **a)** 44 vuotta, **b)** 36 vuotta, **c)** 51 vuotta, **d)** 63 %, **e)** $100 \frac{21a - 15a}{15a} = 40$ % (lääkäreitä $100a$).
- Jos vanhempia kutsutaan x henkeä ja muita y henkeä, niin pätee $0,65x + 0,45y = 260$ ja $0,65x = 0,75 \cdot 260$. Jälkimmäisestä saadaan, että $x = 300$. Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan, että $y = \frac{260 - 0,65 \cdot 300}{0,45} = \frac{13}{0,09} \approx 144,44$. Vastaus: Kutsuttava vanhempia 300 ja muita henkilöitä 144.
- Lautoihin vinoon lyöty naula on hypotenuusana suorakulmaisessa kolmiossa ABC , missä A on naulan kanta, B naulan kärki ja C laudan pinnalla pystysuoraan B :n yläpuolella. Jos α on naulan ja laudan välinen kulma, on $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$. **a)** Pienin kaltevuuskulma syntyy, kun naula tunkeutuu alempaan lautaan vain 8 mm syvyyteen. Tällöin $\sin \alpha = \frac{14+8}{30} = \frac{22}{30}$, josta $\alpha \approx 47,17^\circ$. **b)** Suurin kaltevuuskulma syntyy, kun naula tunkeutuu alempaan lautaan lähes 14 mm syvyyteen. Tällöin $\sin \alpha = \frac{28}{30}$, josta $\alpha \approx 68,96^\circ$. Vastaus: **a)** 47° , **b)** 69° .
- Geometrisen jonon ensimmäinen termi $a = \frac{1}{2}$ ja suhde $q = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$. Siten n :n ensimmäisen termin summa on $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{4}(3^n - 1)$. Tämän perusteella $S_n > 10^6 \Leftrightarrow 3^n - 1 > 4 \cdot 10^6 \Leftrightarrow n \ln 3 > \ln(4 \cdot 10^6 + 1) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(4 \cdot 10^6 + 1)}{\ln 3} \approx 13,837$. Vastaus: Arvosta $n = 14$.
- Alustavasti sovittu hinta urakalle oli $h = 156 \cdot 14 + 89,4 \cdot 9,2 = 3006,48$ euroa. Uusi hinta x euroa on arvonlisäveroineen $1,22x$ euroa. Sopimuksen mukaan $1,22x - h = h - x$. Siten $2,22x = 2h$ eli $x = \frac{1}{1,11}h = 2708,5405$. Arvonlisäveroineen maksu on $1,22x \approx 3304,419$ euroa. Vastaus: $3304,42$ euroa.
- Jos pellon sivun pituus on x m, on sen ala x^2 m² ja piiri $4x$ m. Tästä saadaan x :lle ehto $\frac{128}{10000}x^2 + 0,2 \cdot 4x = 550$ eli $0,0128x^2 + 0,8x - 550 = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \frac{-0,8 \pm \sqrt{28,8}}{0,0256}$. Ainoa positiivinen ratkaisu on $x = 178,3814$, jolloin $x^2 = 31819,9$. Vastaus: Pellon sivu on 178 m ja ala 3,18 ha.

9. Merkitään korkeuseroa $d = 20 \text{ cm} = 0,0002 \text{ km}$ ja maapallon sädettä $R = \frac{1}{2\pi} \cdot 40\,000 \text{ km}$. Olkoon uimari pisteessä A , vastarannan lähin kohta B , maapallon keskipiste O sekä $\angle AOB = 2\alpha$. Tällöin $\cos \alpha = \frac{R-d}{R} \approx 0,9999999686$, josta $\alpha \approx 0,0143619^\circ$.
Kaaren AB pituus $s = 40\,000 \cdot \frac{2\alpha}{360} \approx 3,19154 \text{ km}$. Vastaus: Vähintään $3,2 \text{ km}$.
10. Funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x) = -12x^2 = 0$, kun $x = 0$. Koska $f'(x) < 0$, kun $x \neq 0$, ei $f(x)$:llä ole ääriarvoa, vaan se on aidosti vähenevä kaikkialla. Funktion $g(x)$ derivaatta $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ kaikkialla, joten $g(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava, eikä sillä ole ääriarvoa. Summafunktio on $h(x) = f(x) + g(x) = -3x^3 + x$. Sen derivaatta $h'(x) = -9x^2 + 1 = 0$, kun $x = \pm \frac{1}{3}$. Edelleen, $h'(x) > 0$, kun $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ ja $h'(x) < 0$, kun $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > \frac{1}{3}$. Näin ollen pisteessä $x = -\frac{1}{3}$ on funktiolla paikallinen minimi $h(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}$ ja pisteessä $x = \frac{1}{3}$ paikallinen maksimi $h(\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$.
11. Jos kaksinumeroiset luvut ovat $m = 10k + y$ ja $n = 10k + (10 - y)$, on väite, että $mn = 100k(k+1) + y(10-y)$. Suora lasku antaa, että $mn = (10k+y)(10k+(10-y)) = 100k^2 + 100k + 10y - y^2 = 100k(k+1) + y(10-y)$, mikä oli juuri väite.
12. Jos aineen alkumäärä on K ja puoliintumisaika on t_p tuntia, on ainetta $5t_p$:n jälkeen vielä jäljellä $(\frac{1}{2})^5 K = \frac{1}{32} K = 0,03125K$ eli $3,125\%$. Olkoon lääkeaineesta poistunut 99% ajan xt_p kuluttua. Tällöin on oltava $(\frac{1}{2})^x K = \frac{1}{100} K \Leftrightarrow x \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{100}$. Siis $x = \frac{-\ln 100}{-\ln 2} \approx 6,64386$. Koska $15 \leq t_p \leq 18$, on $6,64386 \cdot 15 \leq xt_p \leq 6,64386 \cdot 18$ eli $99,658 \leq xt_p \leq 119,589$. Vastaus: Lääkeainetta on $5t_p$:n jälkeen jäljellä 3% ja 99% poistumiseen on odotettava $100 - 120 \text{ h}$.
13. Halkaisijan pituus on $d = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. Määritelmän mukaan ympyrän keskipiste $O = (\frac{1}{2}(3+1), \frac{1}{2}(3-1)) = (2, 1)$ ja säde $r = \frac{1}{2}d = \sqrt{5}$. Piste (x, y) on ympyrän piste, jos sen etäisyys O :sta on r eli jos $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5}$. Korroutamalla toiseen saadaan ympyrän yhtälöksi $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Pisteen $(4, 1)$ etäisyys keskipisteestä O on $\sqrt{(4-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4} \neq \sqrt{5}$, joten piste ei ole ympyrän kehällä.
14. Korkoprosentti $p = 2$ ja korkotekijä $q = 1,02$. Lähdeveron vähennyksen jälkeen korkosta jää 71% eli ”verottomaksi korkotekijäksi” saadaan $q_0 = 1 + 0,71 \cdot 0,02 = 1,0142$. Ensimmäinen talletus K kasvaa 7 vuodessa määrään $q_0^7 K$. Toinen talletus on $K + 0,02K = qK$. Se kasvaa jäljellä olevassa 6 vuodessa määrään $q_0^6 qK$. Kolmas talletus on $qK + 0,02qK = q^2 K$. Se kasvaa jäljellä olevassa 5 vuodessa määrään $q_0^5 q^2 K$. Neljäs talletus on $q^2 K + 0,02q^2 K = q^3 K$. Se kasvaa jäljellä olevassa 4 vuodessa määrään $q_0^4 q^3 K$. Lopulta seitsemäs talletus on $q^5 K + 0,02q^5 K = q^6 K$. Se kasvaa jäljellä olevan vuoden aikana määrään $q_0 q^6 K$. Laskemalla yhteen saadaan, että säästösumma $S = (q_0^7 + q_0^6 q + q_0^5 q^2 + \dots + q_0 q^6)K$. Sulussa oleva lauseke on geometrinen summa, missä suhdeluku on $\frac{q}{q_0}$. Siten $S = q_0^7 \frac{1 - (\frac{q}{q_0})^7}{1 - \frac{q}{q_0}} K = q_0 \frac{q^7 - q_0^7}{q - q_0} K \approx 7,859976K$. Kun $K = 500$ euroa, tulee säästösummaksi $S \approx 3929,988$ euroa eli $3929,99$ euroa.

- 15.** Poissonin jakaumassa todennäköisyys n asiakkaaseen minuutissa on $P(n) = \frac{k^n}{n!}e^{-k}$, missä k on keskimääräinen asiakasmäärä. Siten todennäköisyys, että minuutissa on korkeintaan neljä asiakasta on $p = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$. Sijoittamalla edelliseen kaavaan $k = 3$ saadaan $p = (1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!})e^{-3} \approx 0,81526$. Kysytty todennäköisyys on $1 - p \approx 0,18474$. Vastaus: 0,185 eli 18,5 %.