Pitkä matematiikka 24.9.2004, ratkaisut:

1. **a)** $2x - 3 < 3 - 2x \iff 4x < 6 \iff x < \frac{3}{2}$. **b)** $(x+1)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x + 1 \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 0$. **c)** $x^3 < x^2 \iff x^2 \cdot x < x^2 \cdot 1 \iff x < 1,\ x \neq 0$.

2. Suurin sivunpituus on $a+1$. Kolmio on suorakulmainen, jos $(a-1)^2 + a^2 = (a+1)^2 \iff a^2 - 4a = 0$. Ainoa positiivinen ratkaisu on $a = 4$. Hypotenuusa on ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, joten ympyrän säde $r = \frac{1}{2}(a+1) = \frac{5}{2}$. Vastaus: $a = 4$, $r = \frac{5}{2}$.

3. Jos kuution sivun pituus on a, on kuution pinta-ala $6a^2$ ja tilavuus a^3. Pienennetyn kuution pinta-ala on $0{,}64 \cdot 6a^2 = 6(0{,}8a)^2$, joten sen kuution sivun pituus on $0{,}8a$ ja tilavuus $(0{,}8a)^3 = 0{,}512a^3$. Tilavuuksien suhde on 0,512, joten tilavuus on pienentynyt $100(1 - 0{,}512)\,\% = 48{,}8\,\%$.

4. On oltava $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$. Koska $\overline{OP} = t(3\bar{i} + \bar{j})$ ja $\overline{AP} = u\overline{AB} = u(6\bar{i} - \bar{j})$, saadaan yhtälö $t(3\bar{i} + \bar{j}) = \bar{i} + 2\bar{j} + u(6\bar{i} - \bar{j})$ eli $(3t - 6u - 1)\bar{i} + (t + u - 2)\bar{j} = \bar{0}$. Näin on, kun $3t - 6u - 1 = 0$ ja $t + u - 2 = 0$. Yhtälöparin ratkaisu on $t = \frac{13}{9}$ ja $u = \frac{5}{9}$. Siis $\overline{AP} = \frac{5}{9}\overline{AB}$, joten P jakaa janan AB suhteessa 5:4.

5. Laitteen toimimistodennäköisyys takuuaikana on $p = (1 - p_A)(1 - p_B)(1 - p_C) \approx 0{,}9339$. Vikaantumistodennäköisyys on $1 - p \approx 0{,}0661$. Jos komponentti C kahdennetaan, on toimimistodennäköisyys $p = (1 - p_A)(1 - p_B)(1 - p_C^2) \approx 0{,}9806$. Vikaantumistodennäköisyys on $1 - p \approx 0{,}0194$.

6. Funktio $f(x)$ on määritelty, kun $x^3 - x > 0$ eli $x(x^2 - 1) > 0$. Nyt $x^2 - 1 > 0$, kun $x > 1$ tai $x < -1$ ja $x^2 - 1 < 0$, kun $-1 < x < 1$. Näin ollen $x(x^2 - 1) > 0$, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$. Derivaatta $f'(x) = (x^3 - x)^{-1}(3x^2 - 1) = 0$, kun $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}58$. Vain $x_o = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ kuuluu määrittelyalueeseen. Se on lokaali maksimikohta, sillä $f'(x) > 0$, kun $-1 < x < x_o$ ja $f'(x) < 0$, kun $x_o < x < 0$. $f(x_o) = \ln\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}95$. Vastaus: Määrittelyalue on $-1 < x < 0$ tai $x > 1$. Pisteessä $x_o = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ on lokaali maksimi $f(x_o) = \ln\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

7. Ympyrän yhtälö on muotoa $(x+3)^2 + y^2 = 4$, joten keskipiste on $(-3, 0)$ ja säde 2. Suora $y = -x - 1$ leikkaa ympyrää pisteissä, joiden x-koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 + (-x-1)^2 + 6x + 5 = 0$ eli $x^2 + 4x + 3 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $x = -3$ ja $x = -1$. Pienempi segmentti on suoran $y = -x - 1$ yläpuolella välillä $-3 < x < -1$. Sen pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy kappale, jonka tilavuus on $V = \pi\int_{-3}^{-1}((-x^2 - 6x - 5) - (-x-1)^2)\,dx = \pi \Big/_{-3}^{-1} (-\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - 6x) = \frac{8}{3}\pi$.

8.
$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \sin^2\frac{x}{2}/\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1} = \sin x.$$

$$\frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin^2\frac{x}{2}/\cos^2\frac{x}{2}}{1 + \sin^2\frac{x}{2}/\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$

9. Funktio f on välillä $[-1,0]$ jana pisteestä $(-1,0)$ pisteeseen $(0,1)$ ja välillä [0,1] jana pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(1,0)$. Koska f on jaksollinen jaksolla 2, on se jokaisella välillä $[-1+2n,2n]$, $n\in Z$ jana pisteestä $(-1+2n,0)$ pisteeseen $(2n,1)$ ja jokaisella välillä $[2n,1+2n]$, $n\in Z$ jana pisteestä $(2n,1)$ pisteeseen $(1+2n,0)$. Tämä "sahanteräfunktio" f ei ole derivoituva arvoilla $x\in Z$, sillä niissä f:n kuvaajassa on kulma, jonka vasemmanpuolisella suoralla on eri kulmakerroin kuin oikeanpuolisella. Koska $g(x)=f(x+1)$, saadaan g:n kuvaaja siirtämällä f:n kuvaajaa yhden yksikön verran vasemmalle. Tämän vuoksi g:n derivoituvuudelle pätee sama kuin f:n derivoituvuudelle eli g ei ole derivoituva arvoilla $x\in Z$. Koska $h(x)=f(x)+f(x+1)=f(x)+g(x)$, saadaan h:n kuvaaja kullakin välillä $[n,n+1]$, $n\in Z$ laskemalla yhteen jana pisteestä $(n,0)$ pisteeseen $(n+1,1)$ ja jana pisteestä $(n,1)$ pisteeseen $(n+1,0)$. Summa on jana pisteestä $(n,1)$ pisteeseen $(n+1,1)$. Ts. $h(x)=1$ jokaisella $x\in\mathbb{R}$. Se on tällöin derivoituva kaikkialla.

10. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{1}{h}(\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{2-2-h}{2(2+h)}=-\dfrac{1}{2(2+h)}\longrightarrow-\dfrac{1}{4}$, kun $h\to 0$. Siis $f'(2)=-\frac{1}{4}$.

11. Arvoilla $x\neq 0$ on $x^4\le 1/x^4\Leftrightarrow x^8\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Näin ollen $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1}x^{-4}\,dx+\int_{-1}^{1}x^4\,dx+\int_{1}^{\infty}x^{-4}\,dx$. Edelleen, $\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\Big/_{-1}^{1}\frac{1}{5}x^5=\frac{2}{5}$ ja $\int_1^n x^{-4}\,dx=\Big/_{1}^{n}-\frac{1}{3}x^{-3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3n^3}\to_{n\to\infty}\frac{1}{3}$ sekä $\int_{-n}^{-1}x^{-4}\,dx=\Big/_{-n}^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3n^3}\to_{n\to\infty}\frac{1}{3}$. Siten $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{16}{15}$.

12. Koska $a_1=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}$, $a_2=\dfrac{2}{2\cdot 2+1}$, $a_3=\dfrac{3}{2\cdot 3+1}$, $a_4=\dfrac{4}{2\cdot 4+1}$, on oltava $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$. Edelleen, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$. Koska yleinen termi ei lähesty raja-arvoa nolla, ei sarja suppene.

13. Funktio $x^4-7x^2=x^2(x^2-7)$ leikkaa x-akselia arvoilla $x=0$, $x=\pm\sqrt{7}$. Pisteissä $x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ se saa pienimmän arvonsa $-12\frac{1}{4}$, ja pisteessä $x=0$ lokaalin maksimin 0. Suora $y=4x-21$ leikkaa y-akselia kohdassa $y=-21$ ja x-akselia kohdassa $5\frac{1}{4}$. Siinä käyrän pisteessä, joka on lähimpänä suoraa, on käyrän tangentin kulmakerroin sama kuin suoran kulmakerroin eli 4. Koska $y'=4x^3-14x$, on ko. pisteessä oltava $4x^3-14x=4$ eli $2x^3-7x-2=0$. Helposti nähdään, että yhtälö toteutuu arvolla $x=2$. Siten $2x^3-7x-2=(x-2)(2x^2+4x+1)$. Jälkimmäisen tekijän nollakohdat ovat $x=-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}<0$. Koska käyrän kulun perusteella pienimmän etäisyyden antavan pisteen on oltava 4. neljänneksessä, on sen oltava $(2,y(2))=(2,-12)$. Tämän pisteen etäisyys suorasta on $d=\dfrac{|4\cdot 2-(-12)-21|}{\sqrt{4^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\approx 0{,}2425$.

14. Yhtälö $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{4x+x^2}$ separoituu muotoon $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x(x+4)}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dx}{x+4})$. Tämän ratkaisu on $\ln|y|=\frac{1}{4}(\ln|x|-\ln|x+4|)+C'=\frac{1}{4}\ln|\dfrac{x}{x+4}|+C'$ eli $y=C\sqrt[4]{|\dfrac{x}{x+4}|}$.

15. Fermat'n pieni lause: Jos p on alkuluku ja $a \in Z$ ei ole jaollinen p:llä, niin $a^{p-1} = 1 \mod p$. Luku 2003 nähdään helposti alkuluvuksi. Jos 2003 on luvun $n \in N$ tekijä eli $n = 2003k$, niin $(2003k)^{2003} - 2003k = k((2003k)^{2002} - 1)2003 = r \cdot 2003$, missä $r = k((2003k)^{2002} - 1)$ on kokonaisluku. Siis $n^{2003} = n \mod 2003$. Jos 2003 ei ole luvun $n \in N$ tekijä, niin Fermat'n pienen lauseen mukaan $n^{2002} - 1 = 2003k$ eräällä $k \in Z$. Tällöin $n^{2003} - n = n(n^{2002} - 1) = nk \cdot 2003$, missä nk on kokonaisluku. Siis $n^{2003} = n \mod 2003$. Väite on todistettu.