Lyhyt matematiikka 30.9.2005, ratkaisut:

1. **a)** $(3x-2)(3x+5)=0$, kun $3x-2=0$ tai $3x+5=0$ eli kun $x=\frac{2}{3}$ tai $x=-\frac{5}{3}$.
b) Lausekkeen arvo on $\dfrac{1^2-(-1/2)^2}{-2-(-1/2)}=\dfrac{1-1/4}{-2+1/2}=\dfrac{3/4}{-3/2}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.
Vastaus: **a)** Ratkaisut ovat $x=\frac{2}{3}$ ja $x=-\frac{5}{3}$. **b)** Arvo on $-\frac{1}{2}$.

2. Pölyhiukkasen viemä tila on $(0{,}5\cdot 10^{-2})^3=0{,}125\cdot 10^{-6}$ mm^3. Koska 1 m^3 $=10^9$ mm^3, mahtuu kuutiometriin $\dfrac{10^9}{0{,}125\cdot 10^{-6}}=8\cdot 10^{15}$ pölyhiukkasta.
Vastaus: $8\cdot 10^{15}$ pölyhiukkasta.

3. **a)** Boolissa on alkoholia $0{,}38\cdot 0{,}5=0{,}19$ litraa.
b) Boolissa on nestettä 2,4 litraa. Sen alkoholipitoisuus on $100\cdot\frac{0{,}19}{2{,}4}\approx 7{,}917$ prosenttia.
Vastaus: **a)** 0,19 litraa, **b)** 7,9 %.

4. Jos suorakulmion sivujen pituudet ovat x ja y, on $2x+2y=17$, josta $y=8{,}5-x$. Suorakulmion ala on $xy=x(8{,}5-x)$. Koska toisaalta ala on 17,5, saadaan x:lle yhtälö $8{,}5x-x^2=17{,}5$ eli $2x^2-17x+35=0$. Yhtälöllä on ratkaisut $x=\frac{1}{4}(17\pm\sqrt{9})$ eli $x=3{,}5$ tai $x=5$. Vastaavasti $y=8{,}5-3{,}5=5$ tai $y=8{,}5-5=3{,}5$.
Vastaus: Sivujen pituudet ovat 3,5 m ja 5 m.

5. Jos $f(x)=2x^3-3x+1$, on $f'(x)=6x^2-3$ ja $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})=6\cdot\frac{3}{4}-3=\frac{3}{2}$. Edelleen, $f'(x)=0$, kun $6x^2-3=0$ eli kun $x^2=\frac{1}{2}$ eli kun $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Vastaus: $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{2}$ ja $f'(x)=0$, kun $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Jos n osanottajaa kättelee toisiaan kertaalleen, on kättelyitä $(n-1)+(n-2)+...+2+1$. Tämä on aritmeettinen jono, jonka summa on $(n-1)\cdot\frac{1}{2}(1+(n-1))=\frac{1}{2}n(n-1)$. On siis oltava $\frac{1}{2}n(n-1)=66$ eli $n^2-n-132=0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $n=12$ ja $n=-11$. Näistä vain edellinen kelpaa.
Vastaus: 12 osanottajaa.

7. Ympyrän kehän pituus on metreinä $\frac{360}{9}\cdot 5{,}1=204$. Tästä saadaan säteelle r yhtälö $2\pi r=204$, jonka ratkaisu on $r=\frac{1}{\pi}\cdot 102\approx 32{,}4676$.
Vastaus: Säde on 32,5 m.

8. Olkoon A auton sijaintikohta, B ja C Nikon ja Jasminen ensimmäisen ja toisen kohtaamisen paikat sekä D huoltoaseman paikka. Kysytään etäisyyttä $AD=AB+BD$. Nikon kävelynopeudesta 5 km/h saadaan, että $AB=5\cdot\frac{46}{60}=\frac{23}{6}\approx 3{,}83333$ km ja $BC=5\cdot\frac{38}{60}=\frac{19}{6}\approx 3{,}16667$ km. Koska huoltoasemalla asiointi kestää 7 min, pyöräilee Jasmine 31 min, missä ajassa hän matkaa $15\cdot\frac{31}{60}=7{,}75$ km. Toisaalta tämä matka on $2BD+BC$. Tästä saadaan $BD=\frac{1}{2}(7{,}75-BC)=\frac{55}{24}\approx 2{,}29167$ km. Siten $AD=AB+BD=6{,}125$ km.
Vastaus: 6,1 km päässä.

9. Olkoon arvon vuosittainen nousuprosentti p ja olkoon $q = 1 + \frac{1}{100}p$. Jos maksujen euromääräinen arvo vuonna 1993 oli a, oli se vuonna 2002 q^9a. Näin ollen $q^9a = 2{,}5a$, josta $q = \sqrt[9]{2{,}5} \approx 1{,}10717$. Siis $p = 100(q-1) \approx 10{,}717$. Jos korttimaksujen arvo vuonna 1995 oli 10,1 miljardia euroa, oli se vuonna 2002 $10{,}1q^7 \approx 20{,}598$ miljardia euroa ja vuonna 1993 $10{,}1q^{-2} \approx 8{,}240$ miljardia euroa.

Vastaus: Vuosittainen nousuprosentti oli 10,7. Korttimaksujen arvo vuonna 2002 oli 20,6 miljardia euroa ja vuonna 1992 8,2 miljardia euroa.

10. **a)** Kyseessä on toistokoe, jossa sekä kruunan että klaavan todennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Todennäköisyys saada neljällä heitolla kaksi kruunaa ja kaksi klaavaa on $\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{4-2} = 6 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

b) Todennäköisyys saada 20:llä heitolla 10 kruunaa ja 10 klaavaa on vastaavasti $\binom{20}{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^{20-10} = 184756 \cdot (\frac{1}{2})^{20} \approx 0{,}176197$.

Vastaus: **a)** 0,375, **b)** 0,176.

11. Varjon pituus seinällä on suoraan verrannollinen etäisyyteen valonheittimestä. Jos siis henkilö on 4,0 metrin ja seinä 12 metrin etäisyydellä valonheittimestä, on varjon pituus $h = \frac{12}{4} \cdot 1{,}75 = 5{,}25$ metriä. Henkilö etenee kahdessa sekunnissa $95 \cdot \frac{2}{60} = \frac{19}{6} \approx 3{,}1667$ metriä eli on 7,1667 metrin päässä valonheittimestä. Tällöin hänen varjonsa pituus on $h = \frac{12}{7{,}1667} \cdot 1{,}75 \approx 2{,}930$ metriä. Se on kahdessa sekunnissa lyhentynyt $5{,}250 - 2{,}930 = 2{,}320$ metriä.

Vastaus: Varjon pituus 4 metrin etäisyydellä on 5,25 m ja se lyhenee kahdessa sekunnissa 2,32 m.

12. Paraabelin ja suoran leikkauspisteiden x-koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 - x = x + 2$ eli $x^2 - 2x - 2 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{12}) = 1 \pm \sqrt{3}$. Vastaavat y-koordinaatit ovat $y = x + 2 = 3 \pm \sqrt{3}$. Pisteiden väliselle etäisyydelle d pätee $d^2 = (1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3})^2 + (3 + \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3})^2 = 24$, josta saadaan $d = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$.

Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(1 + \sqrt{3},\, 3 + \sqrt{3})$ ja $(1 - \sqrt{3},\, 3 - \sqrt{3})$. Niiden välinen etäisyys on $2\sqrt{6}$.

13. Jos $2^2 = 1 + 3$ ja $3^2 = 2^2 + 5 = 1 + 3 + 5$, on $4^2 = 3^2 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7$. Vastaava kaava arvolla n on $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$. Perustelu: $1 + 3 + ... + (2n-1)$ on aritmeettinen jono, jonka summa on $n \cdot \frac{1}{2}(1 + (2n-1)) = n^2$.

14. Oletus on, että pistemäärä x noudattaa normaalijakaumaa $N(27{,}36; 12{,}23)$. Tällöin pistemäärä $z = \dfrac{x - 27{,}36}{12{,}23}$ noudattaa normitettua normaalijakaumaa $N(0,1)$.

a) Halutaan löytää x_0, jolle $P(x \geq x_0) \leq 0{,}05$ eli jolle $P(x < x_0) \geq 0{,}95$. Tällöin $N(0,1)$:ssä on oltava $P(z < z_0) \geq 0{,}95$. Jos nyt $\Phi(z_0) = 0{,}95$, on $z_0 \approx 1{,}645$. Vastaava $x_0 \approx 27{,}36 + 1{,}645 \cdot 12{,}23 \approx 47{,}478$.

b) Jakauman $N(27{,}36; 12{,}23)$ pistemäärää 12 vastaa jakaumassa $N(0,1)$ pistemäärä $z_1 = \dfrac{12 - 27{,}36}{12{,}23} \approx -1{,}2559$. Koska $\Phi(-z_1) \approx 0{,}8955$, on $P(x > 12) = \Phi(-z_1) = 0{,}8955$.

Vastaus: **a)** Laudaturraja on 48 pistettä. **b)** Jos hyväksymisraja on 12 pistettä, hyväksytään 89,6 prosenttia kokelaista.

15. Vuoden 2002 korkojaksojen pituudet ovat 40, 126 ja 78 päivää. Näin ollen vuonna 2002 korkoa kertyi $k = 11\,000 \cdot \dfrac{2{,}5 \cdot 40 + 2{,}75 \cdot 126 + 2{,}5 \cdot 78}{100 \cdot 365} \approx 193{,}33$ euroa. Kun tästä peritään 29 % lähdevero, jää pääomaan liitettäväksi $k_1 = 0{,}71k \approx 137{,}26$ euroa. Tämä nostaa pääoman vuoden lopussa arvoon 11137,26 euroa.

Vuoden 2003 korkojaksojen pituudet ovat 1, 60 ja 60 päivää. Korkoa kertyi tilin lopetukseen mennessä $k_2 = 11\,137{,}26 \cdot \dfrac{2{,}5 \cdot 1 + 2{,}2 \cdot 60 + 1{,}9 \cdot 60}{100 \cdot 365} \approx 75{,}82$ euroa. Kun tästä peritään 29 % lähdevero, jää pääomaan liitettäväksi $k_3 = 0{,}71k_2 \approx 53{,}83$ euroa. Tämä nostaa pääoman arvoon 11191,09 euroa. Tilin tuotoksi tuli 191,09 euroa ja tuottoprosentiksi $100 \cdot \frac{191{,}09}{11\,000} \approx 1{,}7372$.

Vastaus: Henkilö sai varat nostessaan 11191,09 euroa. Tuottoprosentti oli 1,74.