Pitkä matematiikka 30.9.2005, ratkaisut:

1. **a)** $2(x-1)+3(x+1)=-x \iff 6x=-1 \iff x=-\frac{1}{6}$.

b) $x+2=\dfrac{1}{x-2} \iff x^2-4=1 \iff x=\pm\sqrt{5}$.

c) $x^{16}=256=2^8 \iff x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}$.

Vastaus: **a)** $x=-\frac{1}{6}$, **b)** $x=\pm\sqrt{5}$, **c)** $x=\pm\sqrt{2}$.

2. **a)** Jos hypotenuusan pituus on x, niin $x^2=6^2+4^2=52$, joten $x=2\sqrt{13}\approx 7{,}2111$.
b) Jos kolmion terävät kulmat ovat α ja β, niin $\tan\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, josta $\alpha\approx 33{,}6901^{\circ}$ ja $\beta=90^{\circ}-\alpha\approx 56{,}3099^{\circ}$.

c) Kolmion ala on $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$.

Vastaus: **a)** $2\sqrt{13}\approx 7{,}21$, **b)** $33{,}69^{\circ}$ ja $56{,}31^{\circ}$, **c)** 12.

3. Vektori $\overline{AB}=(7-3)\overline{i}+(3-1)\overline{j})=4\overline{i}+2\overline{j}$ ja $\overline{CD}=(-3-1)\overline{i}+(-2-4)\overline{j})=-4\overline{i}-6\overline{j}$. Jos vektorien välinen kulma on α, on $\cos\alpha=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\,|\overline{CD}|}=-\dfrac{28}{\sqrt{20}\sqrt{52}}=-\dfrac{7}{\sqrt{65}}\approx -0{,}868243$, josta $\alpha\approx 150{,}25512^{\circ}$.

Vastaus: Kulma on $150{,}3^{\circ}$.

4. Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktio saa siten vain negatiivisia arvoja, jos paraabelin huippu on x-akselin alapuolella. Koska $f'(x)=-2x+a=0$, kun $x=\frac{1}{2}a$, on huipun x-koordinaatti $\frac{1}{2}a$. On siis oltava $f(\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2+a-3<0$. Koska $\frac{1}{4}a^2+a-3=0$, kun $a=-6$ tai $a=2$, on $f(\frac{1}{2}a)<0$, kun $-6<a<2$.
Vastaus: Arvoilla $-6<a<2$.

5. Jos alussa puun korkeus on h_1 ja tyven halkaisija d_1, on puun alkutilavuus $V_1=\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}d_1)^2h_1$. Kahdenkymmenen vuoden kuluttua puun korkeus $h_2=\frac{7}{6}h_1$, tyven halkaisija $d_2=\frac{4}{3}d_1$ ja tilavuus $V_2=\frac{1}{3}\pi(\frac{2}{3}d_1)^2(\frac{7}{6}h_1)=\frac{56}{27}V_1$. Tilavuuden prosentuaalinen kasvu on $100(\dfrac{V_2}{V_1}-1)=100(\frac{56}{27}-1)=100\cdot\frac{29}{27}\approx 107{,}407$.
Vastaus: Tilavuus kasvaa 107,4 %.

6. Ympyrän ja suoran $y=x-a$ leikkauspisteiden x-koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2+(x-a)^2=a^2$ eli $2x(x-a)=0$, jonka ratkaisu on $x=0$ tai $x=a$. Leikkauspisteet ovat siis $A=(0,-a)$ ja $B=(a,0)$. Nämä ovat sen janan päätepisteet, jolla suora jakaa ympyrän kahteen osaan. Pienempi osa on kalotti, joka saadaan poistamalla neljännesympyrästä kolmio OAB (O on origo). Kalotti on 4. neljänneksessä, jos $a>0$ ja 2. neljänneksessä, jos $a<0$. Kalotin ala on $\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}a^2$ ja loppuympyrän $\frac{3}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2$. Alojen suhde on siten $\dfrac{\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}=\dfrac{\pi-2}{3\pi+2}\approx 0{,}099923$.
Vastaus: Suhde on $\dfrac{\pi-2}{3\pi+2}\approx 0{,}100$.

7. Funktion f derivaatta $f'(x)=\dfrac{2x(1-x^4)}{(x^4+x^2+1)^2}$. Kun $x>1$, on $2x(1-x^4)<0$ ja $(x^4+x^2+1)^2>0$ eli $f'(x)<0$. Näin ollen funktio on aidosti vähenevä, kun $x>1$. Koska $1<a<b$, on oltava $f(a)>f(b)$.

Vastaus: $f(a)$ on suurempi.

8. Kuoria on yhteensä 16. Niistä voidaan valita kaksi $\binom{16}{2} = 120$ eri tavalla. Valintoja, joissa tulee kaksi samanväristä on ruskean tapauksessa $\binom{2}{2} = 1$, mustan $\binom{6}{2} = 15$ ja sinisen $\binom{8}{2} = 28$ eli yhteensä $1 + 15 + 28 = 44$. Kuoret ovat siten samanväriset todennäköisyydellä $\frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$.

Vastaus: Todennäköisyydellä $\frac{11}{30}$.

9. Olkoon laskevan suoran yhtälö $y-4 = k(x-3)$. Suora leikkaa y-akselia pisteessä $y_0 = 4 - 3k$ ja x-akselia pisteessä $x_0 = 3 - \frac{4}{k}$. Suoran ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion ala on $\frac{1}{2}x_0y_0$ eli k:n funktiona $f(k) = \frac{1}{2}(3 - \frac{4}{k})(4 - 3k) = \frac{1}{2}(24 - 9k - \frac{16}{k})$. Derivaatta $f'(k) = \frac{1}{2}(-9 + \frac{16}{k^2}) = 0$, kun $k^2 = \frac{16}{9}$ eli $k = \pm\frac{4}{3}$. Koska suora on laskeva, on $k = -\frac{4}{3}$. Koska $f'(k) < 0$, kun $k < -\frac{4}{3}$ ja $f'(k) > 0$, kun $0 > k > -\frac{4}{3}$, on kyseessä minimikohta. Vastaava funktion arvo on $f(-\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}(3+3)(4+4) = 24$.

Vastaus: Kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$ ja vastaava pienin ala 24.

10. Koska $a_1 = \dfrac{1+0\cdot 3}{1+1}$, $a_2 = \dfrac{1+1\cdot 3}{2+1}$, $a_3 = \dfrac{1+2\cdot 3}{3+1}$, $a_4 = \dfrac{1+3\cdot 3}{4+1}$, ja $a_5 = \dfrac{1+4\cdot 3}{5+1}$, on oltava $a_n = \dfrac{1+(n-1)\cdot 3}{n+1} = \dfrac{3n-2}{n+1}$. Kun $n \to \infty$, niin $a_n = \dfrac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 3$. Koska $a_{n+1} - a_n = \dfrac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$, on jono nouseva. Näin ollen $|a_n - 3| < 0{,}001$, kun $3 - \dfrac{3n-2}{n+1} < 0{,}001 \iff \dfrac{5}{n+1} < 0{,}001 \iff n > 4999$ eli arvosta $n = 5000$ alkaen.

11. Yhtälö on määritelty, kun $x > 0$. Merkitään $f(x) = x - 2\ln x$. Derivaatta $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = 0$, kun $x = 2$. Kun $0 < x < 2$, on $f'(x) < 0$ ja kun $x > 2$, on $f'(x) > 0$, joten f saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 2$. Edelleen $f(2) = 2 - 2\ln 2 > 0{,}6 > 0$. Näin ollen $x - 2\ln x > 0$ kaikilla arvoilla x, joilla se on määritelty, joten yhtälöllä $x - 2\ln x = 0$ ei ole reaalijuuria.

12. Alueen ensimmäisessä ja kolmannessa koordinaattineljänneksessä olevat osat ovat symmetriset, joten riittää määrätä ensimmäisessä neljänneksessä olevan ala. Suorat $y = 2x$ ja $y = \frac{1}{2}x$ kulkevat origon O kautta ja leikkaavat hyperbeliä $xy = 1$ pisteissä $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ ja $B = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Tällöin 1. neljänneksessä oleva ala on $\int_0^{1/\sqrt{2}} (2x - \frac{1}{2}x)dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x)dx = \Big/_0^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{4}x^2 + \Big/_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\ln x - \frac{1}{4}x^2)$ $= \frac{3}{8} + 2\ln\sqrt{2} - \frac{3}{8} = \ln 2$. Näin ollen kysytty ala on $2\ln 2 \approx 1{,}3863$.

Vastaus: Ala on $2\ln 2$.

13. **a)** Merkitään $x_n = \frac{\pi}{3} + 10^{-3n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Eräs laskin antaa lausekkeelle arvot $L(x_1) = 4{,}006942$, $L(x_2) = 3{,}99998$, $L(x_3) = 3{,}98$, $L(x_4) = 0$, $L(x_5) = 0$.

b) Koska $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, on $L(x) = \dfrac{\tan x - \tan\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$ eli on funktion $f(x) = \tan x$ erotusosamäärä pisteessä $x = \frac{\pi}{3}$. Funktio $f(x)$ on derivoituva tässä pisteessä, joten on olemassa $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} L(x) = f'(\frac{\pi}{3}) = (\cos\frac{\pi}{3})^{-2} = 4$. Edellä a-kohdassa muodostetun jonon pitäisi tämän perusteella samoin lähestyä arvoa neljä. Funktion $L(x)$ lauseke sopii kuitenkin huonosti numeeriseen laskentaan, joten näin ei kuitenkaan tapahtunut käytetyn laskimen tarkkuudella lasketuille arvoille.

14. Olkoon käyrän yhtälö $y = y(x)$. Pisteeseen $(x_0, y(x_0))$ asetetun tangentin yhtälö on $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$. Jotta tehtävän ehto toteutuisi, on tangentin leikattava x-akselia pisteessä $(2x_0, 0)$. On siis oltava $0 - y(x_0) = y'(x_0)(2x_0 - x_0)$ eli $y(x_0) = y'(x_0) \cdot x_0$. Tästä saadaan differentiaaliyhtälö $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x}$ eli $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$. Siitä voidaan ratkaista y suoraan integroimalla. Saadaan $\ln|y(x)| = -\ln|x| + c'$ eli $y(x) = \dfrac{c}{x}$.

Vastaus: Käyrien yhtälöt ovat muotoa $y = \dfrac{c}{x}$.

15. **a)** Jos jakojäännös on r, on 2^{345} muotoa $5a + r$ eli $2^{345} = r \mod 5$. Edelleen, koska $4 = -1 \mod 5$, on $2^{345} = 2 \cdot 2^{344} = 2 \cdot 4^{172} = 2 \cdot (-1)^{172} = 2 \mod 5$. Siis $r = 2$.

b) Jos jakojäännös on r, on 3^{4567} muotoa $6a + r$ eli 3^{4566} on muotoa $2a + \frac{1}{3}r$. Siis $3^{4566} = \frac{1}{3}r \mod 2$. Edelleen, koska $3 = 1 \mod 2$, on $3^{4566} = 1^{4566} = 1 \mod 2$. Siis $\frac{1}{3}r = 1$ eli $r = 3$.

Vastaus: Jakojäännös on a-kohdassa 2 ja b-kohdassa 3.