Lyhyt matematiikka 29.9.2006, ratkaisut:

1. **a)** $x + 2(4 + x) = -1 \iff 3x = -9 \iff x = -3.$

b) Kertomalla $3x$:llä ja sieventämällä saadaan yhtälö muotoon $2x^2 - 13x - 15 = 0$. Sen ratkaisu on $x = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 + 4 \cdot 2 \cdot 15}}{2} = \dfrac{13 \pm 17}{2}$ eli $x = \frac{15}{2}$ tai $x = -1$.

Vastaus: **a)** Ratkaisu on $x = -3$. **b)** Ratkaisut ovat $x = \frac{15}{2}$ ja $x = -1$.

2. **a)** Suoran kulmakerroin on $\dfrac{6+1}{2-1} = 7$. Suoran yhtälö on $y+1 = 7(x-1)$ eli $y = 7x-8$.

b) Janan AB pituus on $\sqrt{(6+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

c) Keskipiste on $(\dfrac{2+1}{2}, \dfrac{6-1}{2}) = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2})$.

Vastaus: **a)** $y = 7x - 8$, **b)** $5\sqrt{2}$, **c)** $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

3. Jos 0,35-prosenttista liuosta on 500 ml, on siinä desinfektioainetta $0{,}0035 \cdot 500 = 1{,}75$ ml. Jos tarvittava määrä 2-prosenttista liuosta on x ml, on $0{,}02x = 1{,}75$, josta ratkeaa $x = 87{,}5$.

Vastaus: 87,5 ml.

4. **a)** Molemmat toimivat todennäköisyydellä $0{,}98 \cdot 0{,}85 = 0{,}833$.

b) Vain toinen toimii todennäköisyydellä $0{,}98 \cdot (1 - 0{,}85) + 0{,}85 \cdot (1 - 0{,}98) = 0{,}164$.

c) Kumpikaan ei toimi todennäköisyydellä $(1 - 0{,}98)(1 - 0{,}85) = 0{,}003$

Vastaus: **a)** 0,833, **b)** 0,164, **c)** 0,003.

5. Olkoon tikkaiden alapää kohdassa A ja yläpää seinällä kohdassa B ja olkoon C seinän kohta, joka on samalla tasolla kuin A. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on $AB = 5$ m ja $AC = 1{,}5$ m. Jos $BC = y$ m, on $y^2 = 5^2 - 1{,}5^2$, josta $y = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}7697$. Jos tikkaiden uusi pituus on x m, on $x^2 = 1{,}5^2 + (1 + \sqrt{22{,}75})^2 = 26 + 2\sqrt{22{,}75}$, josta $x \approx 5{,}9615$. Tarvittava pidennys on $5 - x \approx 0{,}9615$ m.

Vastaus: 96 cm.

6. Sisälämpötilan 22° ja ulkolämpötilan −2° erotus on 24°. Kun sisälämpötila pudotetaan 21 asteeseen tulee erotukseksi ulkolämpötilaan 23°. Jos lämmityskustannukset ovat aluksi a ja lopuksi b, on $\dfrac{b}{a} = \dfrac{23}{24} = (1 - \dfrac{1}{24}) \approx (1 - \dfrac{4{,}167}{100})$. Näin ollen lämmityskustannukset ovat pienentyneet 4,167 prosenttia.
Vastaus: 4,2 %.

7. Jos kouluun oli matkaa s km, oli Lauran tavallinen nopeus koulumatkalla $v = \dfrac{s}{15} \dfrac{\text{km}}{\text{min}}$. Kyseisenä kertana Laura kulki 95 % matkasta ajassa 15-6 = 9 min. Tällöin hänen nopeutensa oli ollut $v_2 = \dfrac{0{,}95s}{9} \dfrac{\text{km}}{\text{min}}$. Nopeuksien suhde on $\dfrac{v_2}{v} = \dfrac{0{,}95s}{9} \cdot \dfrac{15}{s} = \dfrac{4{,}75}{3} \approx 1{,}5833$. Siten Lauran nopeus oli tällä kertaa ollut 58,33 % tavallista suurempi.
Vastaus: 58 %.

8. Kolmion toinen terävä kulma on $90^\circ - 64{,}5^\circ = 25{,}5^\circ$ eli se on pienempi kuin $64{,}5^\circ$. Näin ollen kolmio pyörähtää kulmaa $64{,}5^\circ$ vastaavan kateetin ympäri. Syntyneen kartion korkeus h on pitemmän kateetin pituus ja säde r lyhyemmän kateetin pituus. Kartion sivujana on kolmion hypotenuusa. Siten $h = 12{,}4 \sin 64{,}5^\circ \approx 11{,}1921$ cm ja $r = 12{,}4 \cos 64{,}5^\circ \approx 5{,}3383$ cm. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx 334{,}0032\ \mathrm{cm}^3$ ja vaipan ala $A = \pi r s \approx 207{,}9589\ \mathrm{cm}^2$.

Vastaus: Kartion tilavuus on $334{,}0\ \mathrm{cm}^3$ ja vaipan ala $208{,}0\ \mathrm{cm}^2$.

9. **a)** Funktion $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3)$. Derivaatta on nolla, kun $x = 0$ tai $x = 3$. Koska $f(-1) = 0, f(0) = \frac{11}{2}, f(3) = -8$ ja $f(4) = -\frac{5}{2}$, on funktion suurin arvo $f(0)$ ja pienin $f(3)$.

b) Tangentin kulmakerroin $k(x) = f'(x) = 3x^2 - 9x$. Sen derivaatta on $k'(x) = 6x - 9$. Derivaatta on nolla, kun $x = \frac{3}{2}$. Koska $k(-1) = 12, k(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{4}$ ja $k(4) = 12$, on kulmakertoimen suurin arvo $k(-1) = k(4)$ ja pienin $k(\frac{3}{2})$.

Vastaus: **a)** Suurin arvo on $f(0) = \frac{11}{2}$ ja pienin $f(3) = -8$. **b)** Suurin arvo on $f'(-1) = f'(4) = 12$ ja pienin $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{4}$.

10. Koska polynomin kuvaaja kulkee origon kautta, on $0 = y(0) = c$. Koska kuvaaja kulkee pisteiden $(1,2)$ ja $(4,3)$ kautta, saadaan kertoimille a ja b yhtälöt $a + b = 2$ ja $16a + 4b = 3$. Näistä saadaan $12a = -5$ eli $a = -\frac{5}{12}$ ja $b = 2 - a = \frac{29}{12}$. Polynomi on siis $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{29}{12}x$. Polynomin derivaatta on $y' = -\frac{10}{12}x + \frac{29}{12}$. Derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ on $y'(2) = -\frac{10}{12} \cdot 2 + \frac{29}{12} = \frac{3}{4}$.

Vastaus: $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{29}{12}x$ ja $y'(2) = \frac{3}{4}$.

11. **a)** Erilaisia istumajärjestyksiä on $30! \approx 2{,}65 \cdot 10^{32}$.

b) Kolme tyhjää pulpettia voidaan valita $\binom{30}{3} = 4060$ eri tavalla. Istumajärjestyksiä tässä luokassa on $\frac{1}{6} \cdot 30! \approx 4{,}42 \cdot 10^{31}$.

c) Tietokoneelta kuluu istumajärjestyksiin $\dfrac{30!}{10^{12} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25} \approx 8{,}4 \cdot 10^{12}$ vuotta.

Vastaus: **a)** $2{,}65 \cdot 10^{32}$ järjestystä, **b)** 4060 tavalla, $4{,}42 \cdot 10^{31}$ järjestystä, **c)** $8{,}4 \cdot 10^{12}$ vuotta.

12. Olkoon $q = 1 - \frac{0{,}043}{100} = 0{,}99957$. Jos ainetta on aluksi a, on sitä vuoden päästä qa, kahden vuoden $q^2 a$ ja n vuoden päästä $q^n a$. Jos n on puoliintumisaika, on $q^n a = 0{,}5a$ eli $q^n = 0{,}5$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \log q = \log 0{,}5$, joten $n = \dfrac{\log 0{,}5}{q} \approx 1611{,}62$.

Vastaus: 1610 vuotta.

13. Jos tuotteen hinta oli alunperin h, oli hinta p % korotuksen jälkeen $(1+\frac{p}{100})h$. Tuotteen hinta oli $2p$ % suuruisen alennuksen jälkeen $(1-\frac{2p}{100})(1+\frac{p}{100})h$. Tästä saadaan p:lle yhtälö $(1-\frac{2p}{100})(1+\frac{p}{100})h = (1-\frac{5{,}5}{100})h$. Sievennyksen jälkeen yhtälö saadaan muotoon $\frac{2}{100}p^2 + p - 5{,}5 = 0$ eli $p^2 + 50p - 275 = 0$. Tämän ratkaisu on $p = \dfrac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 275}}{2} = \dfrac{-50 \pm 60}{2}$ eli $p = -55$ tai $p = 5$. Ratkaisuista vain jälkimmäinen toteuttaa tehtävän ehdot.

Vastaus: $p = 5$.

14. Olkoon $p = 1{,}5$ ja $q = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$. Joka toinen kuukausi tapahtuva 7 euron talletus tuottaa vuodessa korkoa $\dfrac{7p}{100} \cdot \dfrac{1}{12}(12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = \dfrac{7p \cdot 42}{1200} = 0{,}37$ euroa. Vuoden jälkeen tilillä on rahaa $a = 6 \cdot 7 + 0{,}37 = 42{,}37$ euroa. Kahden vuoden jälkeen tilillä on rahaa $a + qa$ euroa, kolmen vuoden jälkeen $a + qa + q^2a$ euroa ja lopulta 40 vuoden jälkeen $a + qa + q^2a + ... + q^{39}a$ euroa. Kyseessä on geometrinen sarja, jonka summa on $a\dfrac{1-q^{40}}{1-q} = 2299{,}33$ euroa.

Vastaus: 2299,33 euroa.

15. **a)** Nopeuden keskiarvon 95 % luottamusväli on $[\overline{x} - 1{,}96\dfrac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1{,}96\dfrac{s}{\sqrt{n}}]$. Sijoittamalla siihen $n = 4190$, $\overline{x} = 97{,}75$ ja $s = 10{,}70$ saadaan väliksi $[97{,}4260; 98{,}0740]$.

b) Nopeudet v noudattavat jakaumaa $N(97{,}75; 10{,}70)$, missä yksikkönä on km/h. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0,1)$ muunnoksella $z = \dfrac{v - 97{,}75}{10{,}70}$, $z_0 = \dfrac{90 - 97{,}75}{10{,}70} \approx -0{,}72430$. Todennäköisyys ylittää 90 km/h on $\Phi(-z_0) \approx \Phi(0{,}7243) \approx 0{,}7655$. Näin ollen voidaan arvioida, että seuraavista tuhannesta ajoneuvosta 766 ylittää nopeuden 90 km/h.

Vastaus: **a)** $[97{,}426; 98{,}074]$. **b)** Noin 766.