Pitkä matematiikka 29.9.2006, ratkaisut:

1. **a)** $(1+x)^3 - (1-x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - (1 - 3x + 3x^2 - x^3) = 6x + 2x^3$.

b) $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x+1} \Longleftrightarrow (x+1)^2 = x^2 \Longleftrightarrow 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vastaus: **a)** $2x^3 + 6x$, **b)** $x = -\frac{1}{2}$.

2. **a)** $D(x^2+1)e^{2x} = 2xe^{2x} + 2(x^2+1)e^{2x} = 2(x^2+x+1)e^{2x}$.

b) $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx = -\Big/_1^2 \dfrac{1}{x} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Vastaus: **a)** $2(x^2+x+1)e^{2x}$, **b)** $\frac{1}{2}$.

3. Jos ympyrän ala on $A = \pi r^2$, on säde $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Ympyrän ympäri piirretyn neliön sivu on $2r = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Neliön ala on $(2r)^2 = 4\frac{A}{\pi}$.

Ympyrän sisään piirretyn neliön sivu on $r\sqrt{2}$. Neliön ala on $(r\sqrt{2})^2 = 2r^2 = 2\frac{A}{\pi}$.

Vastaus: Ympäri piirretyn neliön ala on $4\frac{A}{\pi}$ ja sisään piirretyn $2\frac{A}{\pi}$.

4. On määrättävä x ja y siten, että $\overline{i} + 7\overline{j} = x\overline{a} + y\overline{b}$ eli $\overline{i} + 7\overline{j} = x(2\overline{i} + 3\overline{j}) + y(-7\overline{i} + 6\overline{j}) = (2x - 7y)\overline{i} + (3x + 6y)\overline{j}$. Tästä saadaan yhtälöpari $2x - 7y = 1$ ja $3x + 6y = 7$. Eliminoimalla x saadaan $y = \frac{1}{3}$, josta edelleen $x = \frac{1}{2}(1 + 7y) = \frac{5}{3}$.

Vastaus: $\overline{i} + 7\overline{j} = \frac{5}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$.

5. Jos hopeaa on x g, on kuparia $150 - x$ g. Hopean tilavuus on $\dfrac{x}{10{,}5}$ cm^3 ja kuparin $\dfrac{150-x}{9{,}0}$ cm^3. Koska esineen tilavuus on $\dfrac{150}{10{,}1}$ cm^3, saadaan tästä yhtälö $\dfrac{x}{10{,}5} + \dfrac{150-x}{9{,}0} = \dfrac{150}{10{,}1}$ eli $x(\dfrac{1}{9{,}0} - \dfrac{1}{10{,}5}) = 150(\dfrac{1}{9{,}0} - \dfrac{1}{10{,}1})$. Tämän ratkaisu on $x = 100 \cdot 1{,}1 \cdot \dfrac{10{,}5}{10{,}1} \approx 114{,}356$. Prosentuaalisesti hopean osuus on $100 \cdot \dfrac{114{,}356}{150} \approx 76{,}2376$. Kuparin osuus on $100 - 76{,}2376 = 23{,}7624$.

Vastaus: Hopeaa 76,2 % ja kuparia 23,8 %.

6. Jaksollisuuden vuoksi riittää tarkastella väliä $[0, 2\pi]$. Funktion $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ derivaatta on $f'(x) = -2\cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$. Derivaatta on nolla, kun joko $\cos x = 0$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$. Välillä $[0, 2\pi]$ edellinen toteutuu, kun $x = \frac{\pi}{2}$ tai $x = \frac{3\pi}{2}$ ja jälkimmäinen kun $x = \frac{\pi}{6}$ tai $x = \frac{5\pi}{6}$. Näissä pisteissä funktio saa arvot $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}, f(\frac{\pi}{2}) = 1, f(\frac{3\pi}{2}) = -1$. Välin päätepisteissä funktio saa arvot $f(0) = f(2\pi) = 1$. Funktion suurin arvo on siis $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$ ja pienin $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$.

Vastaus: Funktion suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin arvo -1.

7. Nelikulmiossa $ABCD$ kulma A on 70°, kulma B 125° ja kulma C 110°. Sivu AB on 88 m ja sivu BC 120 m. Kulma D on $360^\circ - (70^\circ + 125^\circ + 110^\circ) = 55^\circ$. Nelikulmion lävistäjän AC pituus d saadaan kosinilauseella. $d^2 = 88^2 + 120^2 - 2 \cdot 88 \cdot 120 \cos 125^\circ \approx 34257{,}934$. Näin ollen $d \approx 185{,}0890$ m. Kulmalle $\beta = \angle BAC$ saadaan sinilauseesta ehto $\dfrac{\sin\beta}{120} = \dfrac{\sin 125^\circ}{d}$, josta $\beta \approx 32{,}07889^\circ$. Tällöin kulma $\gamma = \angle CAD = 70^\circ - \beta \approx 37{,}92111^\circ$ ja kulma $\delta = \angle ACD = 180^\circ - 55^\circ - \gamma \approx 87{,}07889^\circ$. Jos AD:n pituus on x m ja CD:n y m, on $\dfrac{\sin\delta}{x} = \dfrac{\sin 55^\circ}{d}$, josta $x = d\dfrac{\sin\delta}{\sin 55^\circ} \approx 225{,}66$. Vastaavasti $\dfrac{\sin\gamma}{y} = \dfrac{\sin 55^\circ}{d}$, josta $y = d\dfrac{\sin\gamma}{\sin 55^\circ} \approx 138{,}86$.

Vastaus: Neljäs kulma on 55°. Kahden muun sivun pituudet ovat 226 m ja 139 m.

8. Jos taso leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x - y = 2$, on sen yhtälö muotoa $x - y + cz = 2$. Jotta taso kulkisi pisteen $(1,1,1)$ kautta, on oltava $1 - 1 + c = 2$ eli $c = 2$. Tason yhtälö on siis $x - y + 2z = 2$ eli $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 1$.

Vastaus: Yhtälö on $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 1$.

9. Olkoon AB kartion korkeusjana ja AC kartion sivujana. Pallo sivuaa sivujanaa pisteessä D. Kolmiot ABC ja ADO, missä O on pallon keskipiste, ovat yhdenmuotoiset. Sen vuoksi $\dfrac{R}{r} = \dfrac{h - R}{\sqrt{h^2 + r^2}}$ eli $R\sqrt{h^2 + r^2} = hr - rR$. Tästä ratkeaa pallon säde, $R = \dfrac{hr}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$. Edelleen, kun r on vakio, on $\lim_{h\to\infty} R = \lim_{h\to\infty} \dfrac{r}{r/h + \sqrt{1 + (r/h)^2}} = \dfrac{r}{0 + \sqrt{1 + 0}} = r$ ja kun h on vakio, on $\lim_{r\to\infty} R = \lim_{r\to\infty} \dfrac{h}{1 + \sqrt{(h/r)^2 + 1}} = \dfrac{h}{1 + \sqrt{0 + 1}} = \frac{1}{2}h$.

10. Olkoon poikien syntymistodennäköisyys p ja tyttöjen t. Olkoon A tapahtuma ”ainakin yksi tyttö” ja B ”neljä tyttöä” Tällöin $P(A \cap B) = t^4$ ja $P(A) = 1 - p^4$. Jos tiedetään, että ainakin yksi lapsi on tyttö, on todennäköisyys sille, että kaikki ovat tyttöjä $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Olkoon sitten C tapahtuma ”ainakin kaksi tyttöä” ja D ”kaksi poikaa”. Tällöin $P(C \cap D) = 6p^2t^2$ ja $P(C) = 1 - p^4 - 4p^3t$. Jos tiedetään, että ainakin kaksi lapsista on tyttöjä, on todennäköisyys sille, että perheessä on kaksi poikaa $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(C)}$.

Oletetaan ensin, että $p = t = \frac{1}{2}$. Tällöin $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$ ja $P(A) = \frac{15}{16}$, joten $P(B|A) = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{15} = \frac{1}{15}$. Edelleen, $P(C \cap D) = \frac{6}{16}$ ja $P(C) = \frac{11}{16}$, joten $P(D|C) = \frac{6}{16} \cdot \frac{16}{11} = \frac{6}{11}$.
Oletetaan sitten, että $p = 0{,}51$ ja $t = 0{,}49$. Tällöin $P(A \cap B) = 0{,}057688$ ja $P(A) = 0{,}932348$, joten $P(B|A) = 0{,}061831$. Edelleen, $P(C \cap D) = 0{,}374700$ ja $P(C) = 0{,}672352$, joten $P(D|C) = 0{,}557298$.

Vastaus: Todennäköisyydet ovat kysytyssä järjestyksessä $\frac{1}{15}$, $\frac{6}{11}$, 0,06183 ja 0,55730.

11. Yhtälöstä $2x^2 + y^2 = 6$ saadaan, että $y = \pm\sqrt{6-2x^2}$. Koska $y(1) = -2$, on kysytty funktio $y = y(x) = -\sqrt{6-2x^2}$. Sen derivaatta on $y'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{6-2x^2}}$, joten $y'(1) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. Pisteeseen $(1,-2)$ asetetun funktion kuvaajan tangentin yhtälö on $y+2 = x-1$ eli $y = x-3$. Tämä leikkaa x-akselin pisteessä $x = 3$.

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = x-3$ ja se leikkaa x-akselin pisteessä $x = 3$.

12. Lukujonojen (x_n) ja (y_n) jäsenet ovat muotoa $x_n = xp^{n-1}$ ja $y_n = yq^{n-1}$. Tällöin tulojonon (z_n) jäsenet ovat muotoa $z_n = x_n y_n = xyp^n q^n$. Kahden peräkkäisen jäsenen suhde on $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = pq$. Tämä ei riipu indeksistä n, joten jono on geometrinen suhdeluvulla pq.

Jos (x_n) suppenee, on $|p| < 1$ ja jos (y_n) hajaantuu, on $|q| \geq 1$. Tulojono (z_n) on suppeneva, jos $|pq| < 1$. Näin käy esimerkiksi, kun $p = \frac{1}{4}$ ja $q = 2$, jolloin $|pq| = \frac{1}{2}$.

13. Ympyränkaaren yhtälö on muotoa $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, missä (x_0,y_0) on keskipiste ja r säde. Koska pisteet $(2,0)$ ja $(-2,0)$ ovat kaarella, on $(2-x_0)^2 + y_0^2 = r^2 = (-2-x_0)^2 + y_0^2$. Tästä saadaan, että $-4x_0 = 4x_0$ eli $x_0 = 0$. Pisteiden $(2,0)$ ja $(0,1)$ etäisyydet keskipisteestä $(0,y_0)$ ovat molemmat säteitä. Näin ollen $2^2 + y_0^2 = r^2 = (1-y_0)^2$. Tästä saadaan $4 = -2y_0 + 1$ eli $y_0 = -\frac{3}{2}$. Säde on silloin $r = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$. Ympyrän yhtälö on siis $x^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Tästä ratkeaa $y = \pm\sqrt{\frac{25}{4} - x^2} - \frac{3}{2}$. Koska tarkasteltava kaari kulkee pisteen $(0,1)$ kautta, vain $+$-merkki kelpaa. Kaaren yhtälö on siten $y = \sqrt{\frac{25}{4} - x^2} - \frac{3}{2}$. Kun kaari pisteiden $(-2,0)$ ja $(2,0)$ välillä pyrähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyspinta. Pinnan rajaaman kappaleen tilavuus on $V = \pi\int_{-2}^{2}(\sqrt{\frac{25}{4} - x^2} - \frac{3}{2})^2\, dx$.

14. Funktio $y(x) = \dfrac{(x-a)^2-1}{(x-a)} = x-a-\dfrac{1}{x-a}$. Sen derivaatta on $y'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-a)^2}$. Näin ollen $y^2(x) = (x-a)^2 + \dfrac{1}{(x-a)^2} - 2$ ja $y'(x)^2 = 1 + \dfrac{2}{(x-a)^2} + \dfrac{1}{(x-a)^4}$. Siis $(y(x)^2+4)(y'(x)-1) = (x-a+\dfrac{1}{x-a})^2 \cdot \dfrac{1}{(x-a)^2} = (1+\dfrac{1}{(x-a)^2})^2 = y'(x)^2$. Tästä näkyy, että $y(x)$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu kaikilla vakion a reaaliarvoilla.

Jotta olisi $y(1) = 2$, on oltava $1-a-\dfrac{1}{1-a} = 2$ eli $(1-a)^2-1 = 2(1-a)$. Sievennettynä yhtälö saa muodon $a^2 = 2$, jonka ratkaisut ovat $a = \pm\sqrt{2}$.

15. Neljän osavälin Simpsonin sääntö välillä [0,4] askelpituudella $h = 1$ on $\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{3}(f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+f(4))$. Kun integroitava funktio $f(x) = x^2$, saadaan $\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{1}{3}(0+4+8+36+16) = \frac{64}{3}$. Integraalin tarkka arvo on $\int_0^4 x^2 dx = \Big/_0^4 \frac{1}{3}x^3 = \frac{64}{3}$. Simpsonin säännön antama tulos on siis tässä tapauksessa tarkka.

Simpsonin säännön virhetermi on $E_n = -\dfrac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180n^4}$. Virhetermi häviää, jos $f^{(4)}(t) = 0$ kaikilla arvoilla t. Jos f on polynomi, näin tapahtuu silloin, kun polynomin aste on korkeintaan kolme.