

Lyhyt matematiikka 19.9.2007, ratkaisut:

1. a) $7x^2 + 3x = 0 \iff x(7x + 3) = 0 \iff x = 0$ tai $7x + 3 = 0$ eli $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{7}$.

b) $\frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{5}(2x + 2) \iff \frac{1}{4}x + 1 = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \iff \frac{3}{20}x = \frac{3}{5} \iff x = 4$.

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$.

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{7}$, b) $x = 4$, c) $\frac{2}{x^2-1}$.

2. a) Jos annettua kateettia vastaava kulma on α , on $\sin \alpha = \frac{5}{11}$, josta $\alpha \approx 27,0357^\circ$. Toinen terävä kulma on $90^\circ - \alpha \approx 62,9643^\circ$.

b) Derivaatta on $f'(x) = 2007 \cdot 3x^{2006} - 12 \cdot 15x^{11} + 2 = 6021x^{2006} - 180x^{11} + 2$.

c) Aritmeettinen lukujono on muotoa $a, a + d, a + 2d, \dots$. Nyt $a = 1$ ja $a + d = 4$, joten $d = 4 - 1 = 3$. Kymmenes termi on $a + 9d = 1 + 9 \cdot 3 = 28$.

Vastaus: a) $27,04^\circ$ ja $62,96^\circ$, b) $6021x^{2006} - 180x^{11} + 2$, c) 28.

3. Vuonna 2005 käytettiin omaa ydinsähköä $0,263 \cdot 84,9 = 22,3287$ (TWh) ja muuta kotimaista sähköä $0,537 \cdot 84,9 = 45,5913$ (TWh). Tuontisähköllä jouduttiin kattamaan $100 - 26,3 - 53,7 = 20,0$ prosenttia eli 16,98 TWh. Oletusten mukaan vuonna 2009 käytetään sähköä $1,12 \cdot 84,9 = 95,088$ (TWh). Tästä on omaa ydinsähköä $22,3287 + 14 = 36,3287$ (TWh), muuta kotimaista sähköä 45,5913 TWh ja tuontisähköä $95,088 - 36,3287 - 45,5913 = 13,168$ (TWh). Kotimaisen ydinvoiman prosentuaalinen osuus on $100 \cdot 36,3287/95,088 \approx 38,21$ ja tuontisähkön prosentuaalinen osuus $100 \cdot 13,168/95,088 \approx 13,848$.

Vastaus: Ydinsähkön osuus on 38,2 % ja tuontisähkön 13,8 %.

4. Yhtälöstä $2x - 3 = 3x - 2$ saadaan leikkauspisteen x -koordinaatiksi $x = -1$. Vastaava y -koordinaatti on $y = 2(-1) - 3 = -5$. Suoran s kulmakerroin on $\frac{7+5}{7+1} = \frac{3}{2}$, joten suoran yhtälö on $y - 7 = \frac{3}{2}(x - 7)$ eli $3x - 2y = 7$.

Vastaus: $P = (-1, -5)$ ja suoran yhtälö on $3x - 2y = 7$.

5. Maustetun teen kilohinta on $3,30/0,150 = 22$ (euroa). Mustan teen määrälle x kg saadaan hinnoista yhtälö $3,30 + 5,50x = \frac{1}{2} \cdot 22(0,150 + x)$ eli $5,50x = 1,65$. Tämän ratkaisu on $x = 0,3$.

Vastaus: 300 g.

6. Olkoon C suoraan harjan A alapuolella räystäään alareunan tasossa ja olkoon AC :n pituus x m. Janan BC pituus on $7,64/2 + 0,54 = 4,36$ (m). Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan, että $\frac{x}{4,36} = \frac{1,80}{7,64/2}$. Tästä saadaan $x \approx 2,05445$. Lappeen pituus on nyt $AB = \sqrt{x^2 + 4,36^2} \approx 4,8198$ (m).

Vastaus: $AB \approx 4,82$ m.

7. Maapallon säde on $r = 40\,000/(2\pi) \approx 6366,1977$ (km) ja pinta-ala $4\pi r^2$. Merien pinta-ala $A = 0,7 \cdot 4\pi r^2 \approx 3,56507 \cdot 10^8$ km². Merien pinta nousisi $150/A \approx 4,207 \cdot 10^{-7}$ km = 0,4207 mm.

Vastaus: 0,42 mm.

8. Valmistettakoon maalia A x litraa ja maalia B y litraa. Keltaiselle pigmentille pätee $80x + 120y = 3200$ ja siniselle $110x + 90y = 3500$. Sieventämällä saadaan yhtälöt $4x + 6y = 160$ ja $11x + 9y = 350$. Eliminoimalla y saadaan $x = 22$, josta edelleen $y = (160 - 4 \cdot 22)/6 = 12$.

Vastaus: Maalia A 22 l ja maalia B 12 l.

9. Jyviä kertyy n :lle ensimmäiselle ruudulle $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$. Tämä on geometrinen summa, jonka suuruus on $(1 - 2^n)/(1 - 2) = 2^n - 1$. Ruutujen määrälle n saadaan annetuista massoista ehto $0,025(2^n - 1) = 700 \cdot 10^9$ eli $2^n = 28 \cdot 10^{12} + 1 \approx 28 \cdot 10^{12}$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \lg 2 \approx \lg 28 + 12$, josta $n \approx 44,67049$. Näin ollen 44 ruutua peittyi vaaditulla tavalla.

Vastaus: 44 ruutua.

10. Suora $y = x - 2$ kulkee pisteiden $(2, 0)$ ja $(4, 2)$ kautta. Koska origo toteuttaa epäyhtälön $y \geq x - 2$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $y = x - 2$ yläpuolella. Suora $7x + 2y = 14$ kulkee pisteiden $(2, 0)$ ja $(0, 7)$ kautta. Koska origo ei toteuta epäyhtälöä $7x + 2y \geq 14$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $7x + 2y = 14$ oikealla puolella. Suora $5x + 4y = 28$ kulkee pisteiden $(0, 7)$ ja $(4, 2)$ kautta. Koska origo toteuttaa epäyhtälön $5x + 4y \leq 28$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $5x + 4y = 28$ vasemmalla puolella. Tästä seuraa, että kaikki kolme epäyhtälöä toteuttavat pisteet ovat kolmiossa, jonka kärjet ovat em. pisteissä $(2, 0)$, $(4, 2)$ ja $(0, 7)$ reunajanaat mukaanluettuina.

11. Todennäköisyys sille, että pallo menee reikään etäisyydeltä r cm ($r \geq 80$) on $P(r) = a/r^2$. Verrannollisuuskerroin a määräytyy ehdosta $P(80) = 1$ eli $a/80^2 = 1$, josta saadaan $a = 6400$. Todennäköisyys, että pallo menee reikään etäisyydeltä 300 cm, on $P(300) = 6400/90000 = 16/225$. Todennäköisyys, että yksikään kymmenestä pallosta ei mene reikään, on $(1 - P(300))^{10}$. Lopulta todennäköisyys sille, että kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään, on edellisen komplementti eli on $1 - (1 - P(300))^{10} \approx 1 - 0,4782 = 0,5218$.

Vastaus: Todennäköisyydellä 0,522.

12. Olkoon ympyrän kehän pituus x (cm), jolloin neliön piiri on $120 - x$ (cm). Ympyrän säde on $\frac{1}{2\pi}x$ ja neliön sivu $30 - \frac{1}{4}x$. Ympyrän ja neliön alojen summa on $f(x) = \pi(\frac{x}{2\pi})^2 + (30 - \frac{x}{4})^2 = (\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16})x^2 - 15x + 900$. Sen derivaatta, $f'(x) = (\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8})x - 15 = \frac{4 + \pi}{8\pi}x - 15$, häviää, kun $x = x_0 = \frac{120\pi}{4 + \pi} \approx 52,7881$. Tällöin $120 - x_0 \approx 67,2119$. Koska $f'(x) < 0$, kun $0 < x < x_0$ ja $f'(x) > 0$, kun $x_0 < x < 120$, antaa x_0 pienimmän arvon.

Vastaus: Ympyrän osuus langasta on 52,8 cm ja neliön 67,2 cm.

13. Polynomien $p(x)$ derivaatta on $p'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2$. Nyt $p'(0,5) = 0,421875$ ja $f'(0,5) = \frac{1}{2\sqrt{1,5}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408248$. Näiden derivaatta-arvojen prosentuaalinen ero on $100 \cdot \frac{p'(0,5) - f'(0,5)}{f'(0,5)} \approx 3,3378$.

Vastaus: 3,34 %

14. Tulevan maksun K nykyarvo saadaan kaavasta $K = q^{-t}K$, missä $q = 1 + p/100$ on korkotekijä, p korkokanta ja t aika korkojaksoina. Tämän mukaan Matin maksuosuuden nykyarvo on $K_M = 32\,000 + (q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + q^{-4})900$ euroa ja Tepon $K_T = 30\,500 + (q^{-1} + q^{-2})2500$ euroa. Kun korkokanta $p = 1,95$ %, on $q = 1,0195$. Tällöin $K_M = 35\,431,12$ euroa ja $K_T = 35\,357,46$ euroa. Puimurin nykyarvo on $K_M + K_T = 70\,788,58$ euroa ja maksuosuuksien ero $K_M - K_T = 73,66$ euroa

Vastaus: Nykyarvo on 70 788,58 euroa ja maksuosuuksien ero 73,66 euroa.

15. A) Valmistajan mukaan todennäköisyys sille, että lamppu ei kestä 8000 tuntia, on $P = 0,01$, jolloin lamppu kestää 8000 tuntia todennäköisyydellä $Q = 0,99$. Todennäköisyys, että 50 lampun joukossa on korkeintaan yksi lamppu, joka ei kestä 8000 tuntia, on $p = Q^{50} + \binom{50}{1}Q^{49}P \approx 0,910565$. Todennäköisyys, että joukossa on vähintään kaksi lamppua, jotka eivät kestä 8000 tuntia, on $q = 1 - p \approx 0,089435$ eli $q \approx 8,9$ %. Koska $8,95 > 5$, ei 5 % riskitasolla ole syytä epäillä valmistajan ilmoituksen luotettavuutta.

15. B) Vektorin $\bar{a} = 2\bar{i} + \frac{3}{2}\bar{j}$ pituus on $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$. Vastaavasti vektorin $\bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ pituus on $|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Jos vektorit \bar{a} ja \bar{b} asetetaan alkamaan origosta, on vektorin \bar{a} päätepiste $(2, \frac{3}{2})$ ja vektorin \bar{b} päätepiste $(3, 4)$. Näin ollen vektorin \bar{a} suuntakulmalle α x -akseliin nähden pätee $\tan \alpha = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$, josta $\alpha \approx 36,870^\circ$. Vastaavasti vektorin \bar{b} suuntakulmalle β x -akseliin nähden pätee $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, josta $\beta \approx 53,130^\circ$. Lopulta $\bar{a} + \bar{b} = (2 + 3)\bar{i} + (\frac{3}{2} + 4)\bar{j} = 5\bar{i} + \frac{11}{2}\bar{j}$ ja $\bar{a} - \bar{b} = (2 - 3)\bar{i} + (\frac{3}{2} - 4)\bar{j} = -\bar{i} - \frac{5}{2}\bar{j}$.