Lyhyt matematiikka 19.9.2007, ratkaisut:

1. **a)** $7x^2+3x=0 \iff x(7x+3)=0 \iff x=0$ tai $7x+3=0$ eli $x=0$ tai $x=-\frac{3}{7}$.

b) $\frac{1}{4}x+1=\frac{1}{5}(2x+2) \iff \frac{1}{4}x+1=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5} \iff \frac{3}{20}x=\frac{3}{5} \iff x=4$.

c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

Vastaus: **a)** $x=0$ tai $x=-\frac{3}{7}$, **b)** $x=4$, **c)** $\dfrac{2}{x^2-1}$.

2. **a)** Jos annettua kateettia vastaava kulma on α, on $\sin\alpha=\frac{5}{11}$, josta $\alpha\approx 27{,}0357^{\circ}$. Toinen terävä kulma on $90^{\circ}-\alpha\approx 62{,}9643^{\circ}$.

b) Derivaatta on $f'(x)=2007\cdot 3x^{2006}-12\cdot 15x^{11}+2=6021x^{2006}-180x^{11}+2$.

c) Aritmeettinen lukujono on muotoa $a,\ a+d,\ a+2d,\ldots$. Nyt $a=1$ ja $a+d=4$, joten $d=4-1=3$. Kymmenes termi on $a+9d=1+9\cdot 3=28$.

Vastaus: **a)** $27{,}04^{\circ}$ ja $62{,}96^{\circ}$, **b)** $6021x^{2006}-180x^{11}+2$, **c)** 28.

3. Vuonna 2005 käytettiin omaa ydinsähköä $0{,}263\cdot 84{,}9=22{,}3287$ (TWh) ja muuta kotimaista sähköä $0{,}537\cdot 84{,}9=45{,}5913$ (TWh). Tuontisähköllä jouduttiin kattamaan $100-26{,}3-53{,}7=20{,}0$ prosenttia eli 16,98 TWh. Oletusten mukaan vuonna 2009 käytetään sähköä $1{,}12\cdot 84{,}9=95{,}088$ (TWh). Tästä on omaa ydinsähköä $22{,}3287+14=36{,}3287$ (TWh), muuta kotimaista sähköä 45,5913 TWh ja tuontisähköä $95{,}088-36{,}3287-45{,}5913=13{,}168$ (TWh). Kotimaisen ydinvoiman prosentuaalinen osuus on $100\cdot 36{,}3287/95{,}088\approx 38{,}21$ ja tuontisähkön prosentuaalinen osuus $100\cdot 13{,}168/95{,}088\approx 13{,}848$.

Vastaus: Ydinsähkön osuus on 38,2 % ja tuontisähkön 13,8 %.

4. Yhtälöstä $2x-3=3x-2$ saadaan leikkauspisteen x-koordinaatiksi $x=-1$. Vastaava y-koordinaatti on $y=2(-1)-3=-5$. Suoran s kulmakerroin on $\frac{7+5}{7+1}=\frac{3}{2}$, joten suoran yhtälö on $y-7=\frac{3}{2}(x-7)$ eli $3x-2y=7$.

Vastaus: $P=(-1,-5)$ ja suoran yhtälö on $3x-2y=7$.

5. Maustetun teen kilohinta on $3{,}30/0{,}150=22$ (euroa). Mustan teen määrälle x kg saadaan hinnoista yhtälö $3{,}30+5{,}50x=\frac{1}{2}\cdot 22(0{,}150+x)$ eli $5{,}50x=1{,}65$. Tämän ratkaisu on $x=0{,}3$.

Vastaus: 300 g.

6. Olkoon C suoraan harjan A alapuolella räystään alareunan tasossa ja olkoon AC:n pituus x m. Janan BC pituus on $7{,}64/2+0{,}54=4{,}36$ (m). Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan, että $\dfrac{x}{4{,}36}=\dfrac{1{,}80}{7{,}64/2}$. Tästä saadaan $x\approx 2{,}05445$. Lappeen pituus on nyt $AB=\sqrt{x^2+4{,}36^2}\approx 4{,}8198$ (m).

Vastaus: $AB\approx 4{,}82$ m.

7. Maapallon säde on $r = 40\,000/(2\pi) \approx 6366{,}1977$ (km) ja pinta-ala $4\pi r^2$. Merien pinta-ala $A = 0{,}7 \cdot 4\pi r^2 \approx 3{,}56507 \cdot 10^8$ km^2. Merien pinta nousisi $150/A \approx 4{,}207 \cdot 10^{-7}$ km $=$ 0,4207 mm.

Vastaus: 0,42 mm.

8. Valmistettakoon maalia A x litraa ja maalia B y litraa. Keltaiselle pigmentille pätee $80x + 120y = 3200$ ja siniselle $110x + 90y = 3500$. Sieventämällä saadaan yhtälöt $4x + 6y = 160$ ja $11x + 9y = 350$. Eliminoimalla y saadaan $x = 22$, josta edelleen $y = (160 - 4 \cdot 22)/6 = 12$.

Vastaus: Maalia A 22 l ja maalia B 12 l.

9. Jyviä kertyy n:lle ensimmäiselle ruudulle $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$. Tämä on geometrinen summa, jonka suuruus on $(1 - 2^n)/(1 - 2) = 2^n - 1$. Ruutujen määrälle n saadaan annetuista massoista ehto $0{,}025(2^n - 1) = 700 \cdot 10^9$ eli $2^n = 28 \cdot 10^{12} + 1 \approx 28 \cdot 10^{12}$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \lg 2 \approx \lg 28 + 12$, josta $n \approx 44{,}67049$. Näin ollen 44 ruutua peittyy vaaditulla tavalla.

Vastaus: 44 ruutua.

10. Suora $y = x - 2$ kulkee pisteiden $(2, 0)$ ja $(4, 2)$ kautta. Koska origo toteuttaa epäyhtälön $y \geq x - 2$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $y = x - 2$ yläpuolella. Suora $7x + 2y = 14$ kulkee pisteiden $(2, 0)$ ja $(0, 7)$ kautta. Koska origo ei toteuta epäyhtälöä $7x + 2y \geq 14$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $7x + 2y = 14$ oikealla puolella. Suora $5x + 4y = 28$ kulkee pisteiden $(0, 7)$ ja $(4, 2)$ kautta. Koska origo toteuttaa epäyhtälön $5x + 4y \leq 28$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $5x + 4y = 28$ vasemmalla puolella. Tästä seuraa, että kaikki kolme epäyhtälöä toteuttavat pisteet ovat kolmiossa, jonka kärjet ovat em. pisteissä $(2, 0)$, $(4, 2)$ ja $(0, 7)$ reunajanat mukaanluettuina.

11. Todennäköisyys sille, että pallo menee reikään etäisyydeltä r cm ($r \geq 80$) on $P(r) = a/r^2$. Verrannollisuuskerroin a määräytyy ehdosta $P(80) = 1$ eli $a/80^2 = 1$, josta saadaan $a = 6400$. Todennäköisyys, että pallo menee reikään etäisyydeltä 300 cm, on $P(300) = 6400/90000 = 16/225$. Todennäköisyys, että yksikään kymmenestä pallosta ei mene reikään, on $(1 - P(300))^{10}$. Lopulta todennäköisyys sille, että kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään, on edellisen komplementti eli on $1 - (1 - P(300))^{10} \approx 1 - 0{,}4782 = 0{,}5218$.

Vastaus: Todennäköisyydellä 0,522.

12. Olkoon ympyrän kehän pituus x (cm), jolloin neliön piiri on $120 - x$ (cm). Ympyrän säde on $\frac{1}{2\pi}x$ ja neliön sivu $30 - \frac{1}{4}x$. Ympyrän ja neliön alojen summa on $f(x) = \pi(\dfrac{x}{2\pi})^2 + (30 - \dfrac{x}{4})^2 = (\dfrac{1}{4\pi} + \dfrac{1}{16})x^2 - 15x + 900$. Sen derivaatta, $f'(x) = (\dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{8})x - 15 = \dfrac{4 + \pi}{8\pi}x - 15$, häviää, kun $x = x_0 = \dfrac{120\pi}{4 + \pi} \approx 52{,}7881$. Tällöin $120 - x_0 \approx 67{,}2119$. Koska $f'(x) < 0$, kun $0 < x < x_0$ ja $f'(x) > 0$, kun $x_0 < x < 120$, antaa x_0 pienimmän arvon.

Vastaus: Ympyrän osuus langasta on 52,8 cm ja neliön 67,2 cm.

13. Polynomin $p(x)$ derivaatta on $p'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2$. Nyt $p'(0{,}5) = 0{,}421875$ ja $f'(0{,}5) = \dfrac{1}{2\sqrt{1{,}5}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}408248$. Näiden derivaatta-arvojen prosentuaalinen ero on $100 \cdot \dfrac{p'(0{,}5) - f'(0{,}5)}{f'(0{,}5)} \approx 3{,}3378$.

Vastaus: 3,34 %

14. Tulevan maksun K nykyarvo saadaan kaavasta $K = q^{-t}K$, missä $q = 1 + p/100$ on korkotekijä, p korkokanta ja t aika korkojaksoina. Tämän mukaan Matin maksuosuuden nykyarvo on $K_M = 32\,000 + (q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + q^{-4})900$ euroa ja Tepon $K_T = 30\,500 + (q^{-1} + q^{-2})2500$ euroa. Kun korkokanta $p = 1{,}95$ %, on $q = 1{,}0195$. Tällöin $K_M = 35\,431{,}12$ euroa ja $K_T = 35\,357{,}46$ euroa. Puimurin nykyarvo on $K_M + K_T = 70\,788{,}58$ euroa ja maksuosuuksien ero $K_M - K_T = 73{,}66$ euroa

Vastaus: Nykyarvo on 70 788,58 euroa ja maksuosuuksien ero 73,66 euroa.

15. A) Valmistajan mukaan todennäköisyys sille, että lamppu ei kestä 8000 tuntia, on $P = 0{,}01$, jolloin lamppu kestää 8000 tuntia todennäköisyydellä $Q = 0{,}99$. Todennäköisyys, että 50 lampun joukossa on korkeintaan yksi lamppu, joka ei kestä 8000 tuntia, on $p = Q^{50} + \binom{50}{1}Q^{49}P \approx 0{,}910565$. Todennäköisyys, että joukossa on vähintaan kaksi lamppua, jotka eivät kestä 8000 tuntia, on $q = 1 - p \approx 0{,}089435$ eli $q \approx 8{,}9$ %. Koska $8{,}95 > 5$, ei 5 % riskitasolla ole syytä epäillä valmistajan ilmoituksen luotettavuutta.

15. B) Vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$. Vastaavasti vektorin $\overline{b} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ pituus on $|\overline{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ asetetaan alkamaan origosta, on vektorin $\overline{a}$ päätepiste $(2, \frac{3}{2})$ ja vektorin $\overline{b}$ päätepiste $(3, 4)$. Näin ollen vektorin $\overline{a}$ suuntakulmalle α x-akseliin nähden pätee $\tan\alpha = \frac{3}{2}/2 = \frac{3}{4}$, josta $\alpha \approx 36{,}870^{\circ}$. Vastaavasti vektorin $\overline{b}$ suuntakulmalle β x-akseliin nähden pätee $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, josta $\beta \approx 53{,}130^{\circ}$. Lopulta $\overline{a} + \overline{b} = (2 + 3)\overline{i} + (\frac{3}{2} + 4)\overline{j} = 5\overline{i} + \frac{11}{2}\overline{j}$ ja $\overline{a} - \overline{b} = (2 - 3)\overline{i} + (\frac{3}{2} - 4)\overline{j} = -\overline{i} - \frac{5}{2}\overline{j}$.